VOLPICELLI

DEL MOTO

RETTILINEO

N. 14

ALE
ov.
anea
VITTORIO EM.

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EM. III NAPOLI
B. Prov.
Miscellanea
C
12
74

BIBLIOTECA PROVINCIALE
misc. C. 12-74
Armadio XXV
Palchetto
Num.° d'ordine 97
34187

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DEL

MOTO RETTILINEO

LUNGO UN SISTEMA DI PIANI

DIVERSAMENTE INCLINATI E CONTIGUI

MEMORIA

DEL PROF. PAOLO VOLPICELLI

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1860

Digitized by Google

INTRODUZIONE ISTORICA.

§. I.

Il primo a fondare non solo, ma ed a svolgere assai distesamente la dottrina del moto ascendente e discendente, sia per un piano inclinato, sia per un sistema di piani contigui fra loro, e diversamente inclinati all'orizzonte, fu Galileo nel suo trattato *De motu naturaliter accelerato* - che forma il soggetto della terza giornata dei « *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, attenenti alla meccanica, ed ai movimenti locali* » altrimenti « *Dialoghi delle nuove scienze*: opera pubblicata dall'autore nel 1638, e che trovasi nel tomo XIII della prima edizione delle opere complete di Galileo Galilei, Firenze 1855, pag. 148. La stessa materia è pure trattata da questo sommo filosofo nella sua opera « *Sermones de motu gravium*, pubblicata nel 1590, al capitolo – *De motu naturaliter accelerato* -, ma con assai minore sviluppo, che in quella già riferita: l'opera medesima, *Sermones etc.*, si trova nel tomo XI della ora citata edizione di Firenze, pag. 9. La pubblicazione di questi originali lavori, oltre a soddisfare quel natural sentimento di venerazione, che tutti nutrono per gli uomini sommi, è utile molto agli studi filosofici, facendo conoscere i primi passi, ed i grandi progressi di Galileo, nel fondare una scienza del tutto allora nuova. Il celebre Lagrange, cui la geometria italiana è debitrice dello stabilimento di sua superiorità in Europa, nella grande opera della *Meccanica Analitica*, riconosce Galileo come autore, non solo del principio della composizione delle forze, ma pure di quello delle velocità virtuali; dai quali principj, e dalla esatta nozione dei movimenti, dovuta non meno a Galileo, la scienza dell' equilibrio dei solidi e dei fluidi, acquistò un procedere uniforme, e indipendente dai vari sistemi, e dalle incerte direzioni che seguirono i successori di Galileo, fino a tanto che non comparve la meccanica di Lagrange (1).

---

(1) G. B. Viviani nel fine della seconda parte delle sue *Memorie*, e *Lettere*, ecc.

Digitized by Google

Una delle prime critiche ingiuste alla teorica di Galileo sulla discesa dei corpi lungo un piano inclinato, fu quella che comparve nel 1645, vale a dire quattro anni dopo la sua morte, nell'opera intitolata « *Petri Casraei* (1) *e societate Jesu, physica demonstrativa, qua ratio, mensura, modus, atque potentia accelerationis motus, in naturali descensu gravium determinantur, adversus nuper excogitatam a Galilaeo Galilaei florentino de eodem motu pseudoscientiam. Ad Clar. Vir. Petrum Gassendum Ecclesiae Dinieusis Praepositum. Parisiis* 4.° ». Così fatte critiche se da una parte non mancano di qualche acume, dall'altra sono prive di verità; giacchè l'autore delle medesime non seppe affatto scegliere destramente il soggetto da censurare in quelle dottrine di Galileo, ma invece prese di mira ciò che in esse non può incontrare obbiezione di sorta. Ed infatti lo stesso Gassendi, celebre filosofo ed ecclesiastico distintissimo, nato a Champtercier presso Digne nel 1502, e morto a Parigi nel 1655, rispose vit-

(1) Ecco la biografia che di questo religioso fu pubblicata nella » Bibliotheca Scriptorum societatis Jesu. Romae 1676, p. 666 ». *Petrus Casraeus* (altri scrissero Cazraeus) *natione gallus, patria Rhedonensis in Britannia Aremorica, natus parente supremae curiae Rhedonensis senatore, anno seculi transacti* 89. *Deo se in Societate dicavit vertentis* 8, *et votorom* 4, *professione se obstrinxit. In ipso Religionis tirocinio, periculosa aegritudine cum laboraret, ex tumore insolito in altero genu, agebatur de eo ad paternam domum remittendo, sed abstitit Provincialis Bartholomaeus Jacquinotius, qui plurimum ob amabilitatem morum illum diligebat, atque ita adhibita diligenti medicorum cura convaluit. Docuit in Societate humaniores litteras, tum septennio philosophiam, quadriennio mathesim, in qua excelluit, et altero quadriennio Theologiam Scholasticam. Regimini admotus gubernavit collegia Metense, Divionense, Nancaeianum, et Domum ibidem probationis, et demum totam provinciam Campaniae, magna laude prudentiae, modestiae, et integritatis. Electus ab illa provincia interfuit Congregationi generali octavae. Romae, et ad nonam quoque atque decimam congregationem tamquam Provincialis accessit, atque ab hac in Assistentem Praepositi Generalis pro Gallia est constitutus. Vir mitissimi ingenii, observantissimus religiosae disciplinae, paupertatis apprime studiosus, superiorum reverentissimus, erga Sanctissimum Sacramentum, Deiparam Virginem, Sanctosque Ignatium et Xaverium, mira pietatis suavitate ferebatur. Puritatis dono adeo singulari praeditus a Deo fuit, ut auditus sit aliquando ingenue fateri, se quamvis impurissimis hominibus in foro poenitentiae aures praeberet, nulla tamen unquam carnis titillationem fuisse commotum. Redux Roma, in Gallicam post undecimam Congregationem Generalem, dum Provinciam Campaniae iterato administraret, gravis annis, et affectae valetudinis, post biennium illius officii, liberationem ab eo enixe petiit, ut se ad mortem, prout diu exoptaverat, praepararet; qua obtenta paulo post, ad laborum praemia evolavit, Divione die* 20 *Aprilis* 1664. *Scripsit docte et accurate multa de disciplinis Philosophicis, Theologicis, Mathematicis, Physicis, quibus plurimum delectabatur, sed nihil publici juris fecit praeter. « Demonstrationem physicam, qua ratio, mensura, modus, ac potentia accelerationis motus in naturali discensu gravium determinatur* (qui è soppressa l'ultima parte di questo titolo, che così continua: *adversus nuper excogitatam a Galilaeo Galilaei florentino de eodem motu pseudoscientiam*). *Parisiis apud Jacobum de Bruil* 1645, *in* 4.° ».

Digitized by Google

toriosamente a quelle ingiuste critiche, con una sua pubblicazione, la quale s'intitola «*Petri Gassendi Ecclesiae Diniensis Praepositi, Epistolae tres de proportione, qua gravia decidentia accelerantur, quibus ad totidem epistolas Petri Casraei e Societate Jesu respondetur*. Queste risposte si trovano in - *Petri Gassendi opera omnia. T. VI, in fol. Lugduni* 1658, *T. III, p.* 564. - Molto curiosa ed assai sviluppata è tale controversia fra i nominati contendenti, niuno dei quali però si dà carico di esaminare il caso della discesa per una serie di piani contigui, nel quale il nominato religioso della compagnia di Gesù avrebbe potuto trovare miglior argomento, alle sue critiche ricerche contro Galileo.

§. II.

Per tanto è da osservare che Galileo, nello svolgere la teorica della discesa e salita di un grave per un sistema di piani diversamente inclinati e contigui, non ebbe riguardo alla perdita di velocità, che il grave subisce nel passare da un piano all'altro seguente; cosicchè le sue conclusioni non si accordano in ciò col fatto, e debbono riguardarsi vere nella sola ipotesi, che quella indicata perdita non abbia luogo. Primo a fare questa osservazione fu il distinto geometra e sacerdote Pietro Varignon, nato nel 1654 a Caen, e morto a Parigi nel 22 dicembre 1722, il quale nel 31 dicembre 1693 lesse nell'accademia reale delle scienze di Parigi una sua memoria, intitolata - *Des poids qui tombent ou qui montent le long de pleusieurs plans contigus* (1), - In questa memoria l'autore fa osservare non essere vero, come Galileo pel primo aveva creduto, e gli altri matematici fino a quel tempo avevano consentito, che cioè quando un corpo cade per piani contigui, la velocità da esso posseduta nel concorso di questi, uguaglia secondo la direzione del piano sul quale il corpo entra, quella che il medesimo aveva secondo il piano che abbandona. E per indicare uno dei luoghi nei quali Galileo insinua questa supposizione, cita la dimostrazione del teorema X (potrebbe citarsi anche il teor. XI), del suo trattato - *De motu naturaliter accelerato* — e precisamente la frase » *quod idem est* » della dimostrazione medesima (2). Sebbene questa rettificazione del Varignon, formi uno dei principali suoi meriti scientifici, e fissi un epoca nel

(1) Mém. de l'accad. R. des Scien. T. X. Paris 1730, p. 301.

(2) Le opere di Galileo, prima ediz. completa, Firenze 1855, T. XIII, p. 189.

Digitized by Google

progresso della scienza del moto; tutta via non fu essa menzionata, nè dal Montucla, nè dagli altri cho scrissero biografie di quel valente geometra.

Il secondo a fare una simile rettificazione, fu Guido Grandi, celebre matematico e monaco camaldolese, nato in Cremona nel 1681, e morto in Pisa nel 1742. Questo dotto religioso, nelle sue *Note* al *trattato di Galileo del moto naturalmente accelerato*, compreso nella terza giornata che sopra indicammo, pubblicate nel tomo XIV della prima edizione completa delle opere di Galileo, Firenze 1855, si esprime, al §. 25, pag. 132 di questo volume, in così fatta guisa « Tutto quello però che dice il Galileo del moto per l'orizzonte, preceduto da una caduta per la perpendicolare, o per un piano inclinato, e quanto asserisce del passaggio da un piano ad un altro, deve intendersi non assolutamente, ma *ex hypotesi* che ritenesse il mobile nell'orizzonte, o nel nuovo piano inclinato, tutta quella velocità, che si era acquistata colla caduta; e facendo conto della diminuzione di velocità, che secondo le cose sopra dimostrate debbe seguire, si dirà ecc. » Chiunque voglia leggere queste dotte osservazioni del padre Grandi al trattato di Galileo *Del moto naturalmente accelerato*, si convincerà che le medesime non diminuiscono punto il merito sommo, che a quel gran fisico matematico si appartiene, per aver egli fondato i primi veri cardini della meccanica, e specialmente del moto. Il Grandi con quelle sue note volle giovare alla scienza, ma non depremere il merito del Galileo, il quale se in alcune cose non vide giustamente, non è da maravigliare; chè la umana ragione anche negl'ingegni superiori si mostra labilo, come la storia sovente insegna.

Se l'argomento delle rettificazioni fatte dal Varignon, e dal Grandi a quel trattato del moto, avesse attirato l'attenzione del celebre Arago, quando egli scriveva la biografia del filosofo toscano, che trovasi nel tomo 3° delle opere sue complete, pag. 240, o quando dettava i due primi tomi della sua popolare astronomia, certo egli avrebbe avuto, per soddisfare alla voglia che ivi mostra di attenuare il merito del filosofo stesso, materia meno impropria di quella dal medesimo assunta, per criticare ingiustamente il Galileo. Quindi non sarà mai bastantemente lodato il chiarissimo sig. Eugenio Alberi, che nel tomo di supplimento alla edizione completa delle opere di Galileo, Firenze 1856, seppe con salde ragioni, ed irrefragabili testimonianze, vittoriosamente ribattere quelle acerbe censure dell'illustre Arago, e dileguarle del tutto.

Digitized by Google

§. III.

Ad onta delle osservazioni giustissime, pubblicate per le stampe, dal Varignon e dal Grandi, non pochi furono i fisici matematici, che nelle opere loro trascurarono le osservazioni medesime, i quali perciò nella teorica del moto dei gravi lungo i piani contigui, non avvertirono alla perdita di velocità, che un grave subisce nel passare da un piano, all'altro immediatamente seguente: noi fra questi riportiamo qui appresso quelli che teniamo sottocchio, e che certo non sono tutti.

Cours élémentaire de mécanique par M. Ch. Delaunay, première partie, Paris 1851, p 110; ove la discesa per una curva si fa dipendere da quella per piani contigui, senza la condizione che gli angoli fra i medesimi sieno infinitesimi.

Physique mécanique par E. G. Fischer, avec des notes par M. Biot, Paris 1830, p. 43.

Elementi generali delle principali parti delle matematiche, ecc. del sig. abate Deidier; traduzione dal francese di Arduino e Matteo Dandalo, Venezia 1762, T. 3,° p. 190, coroll. 2.°

Christiani Wolfii Elementa matheseos universae, Genevae 1746, T. 2,° p. 57, coroll. IV.

Cours de physique par Desaguliers, traduit de l'anglois, par le R. P. Pezenas de la compagnie de Jesus, Paris 1751, T. 1.°, pag. 355 (planche 25, fig. 14).

R. P. Claudii Francisci Milliet Dechales, e Societate Jesu, Cursus seu mundus mathematicus, Lugduni 1640, T. II, p. 302, prop. XXIX, coroll. I.

Joannis Keill Introductiones ad veram physicam, etc. Mediolani 1742, pag. 157, teor. XXXVIII.

Huygens nella prop. VIII dell'orologio oscillatorio, come osserva il Frisi alla pag. 17 delle sue istituzioni di mecc. idrost. ecc. Milano 1777.

In tre classi possono dividersi gli autori fisico-matematici, relativamente alla teorica del moto rettilineo di un grave, animato da una forza sollecitante sempre la stessa, nello scendere o salire per una serie di piani contigui. La prima classe comprende quelli autori che suppongono il grave non subire veruna perdita di velocità, nel passare da uno nell'altro piano contiguo: il primo a fare questa supposizione, che non si accorda colla realtà, fu Galileo. La seconda comprende quelli che non considerano altro, fuorchè il moto sopra un solo piano inclinato. La terza classe appartiene a coloro che, nel con-

Digitized by Google

siderare l' indicato moto sopra una serie di piani diversamente inclinati all'orizzonte, prendono a calcolo la perdita di velocità che il grave subisce, sia salendo sia scendendo, nel passare da un piano all'altro contiguo, e fra essi pare che, a fare questa giusta considerazione, Varignon sia stato primo, e Guido Grandi secondo. Però a me sembra che niuno abbia trattato l'argomento con quella generalità ed eleganza di che il medesimo è capace: niuno in fatti ha dedotto la teorica del moto rettilinco di un grave, che scende o sale lungo una serie di n piani contigui, dalle formule generali del moto verticale uniformemente vario, supponendo nel grave stesso una velocità iniziale. Questo è il punto di partenza il più analitico, il più generale, oltre che il più semplice, per esporre completamente, senza soccorso di figure, l'argomento che ora vogliamo trattare, considerando però soltanto i corpi duri, e non riguardando nè alla resistenza dei mezzi, nè all'attrito.

Moto discendente.

§. IV.

Dalla teorica del moto rettilineo uniformemente accelerato, avendo il mobile una velocità iniziale, sappiamo che le formule da cui questo moto è definito, sono le seguenti:

$$v^2 = 2gs + c^2,\ v = c + gt,\ s = ct + \frac{gt^2}{2}.$$

Ma essendo φ l'angolo che forma un piano inclinato coll'orizzonte, la forza sollecitante costantemente il grave, sarà espressa da $g\mathrm{sen}\varphi$, in vece che da g; cosicchè le formule stesse, riferite a questo piano inclinato, diverranno:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 = 2gs\mathrm{sen}\varphi + c^2 = 2gh + c^2,\ v = c + gt\mathrm{sen}\varphi, \\ s = ct + \dfrac{gt^2\mathrm{sen}\varphi}{2},\ h = s\mathrm{sen}\varphi, \end{array} \right.$$

ove g esprime la gravità, t il tempo della discesa, v la velocità conseguita dal grave nel tempo medesimo, s lo spazio percorso da esso in questo tempo, ed h l'altezza del piano. Le formule quì riportate rappresentano il moto per la discesa, ma le medesime si riferiscono al moto per la salita lungo il piano stesso, quando in esse pongasi $-g$ in vece di g.

Supponiamo una serie di n piani uniti l' uno all' altro, e diversamente inclinati all'orizzonte: un corpo non elastico abbandonato sul primo dei piani medesimi, e perciò senza velocità iniziale al principio del moto, discenda per essi, non incontrando nè resistenza di mezzo, nè attriti. Sieno

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n,$$

gli angoli che i rispettivi piani inclinati fanno coll'orizzonte:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1},$$

gli angoli che i piani medesimi fanno ciascuno col prolungamento del suo contiguo precedente:

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n,$$

le rispettive altezze dei piani stessi:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n,$$

le rispettive lunghezze loro:

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n,$$

le velocità che il grave, scendendo lungo i piani, acquista per avere percorso uno, due, tre, . . . , n di essi: finalmente sieno

$$c_1 (= o), c_2, c_3, \ldots, c_n,$$

le rispettive iniziali velocità del grave al principio di ogni piano, secondo la direzione del medesimo.

Supponendo che la velocità iniziale al principio del moto sia nulla, per la prima ed ultima delle (1) avremo

$$c_1 = o, \quad v_1 = (2gs_1 \operatorname{sen}\varphi_1)^{\frac{1}{2}} = (2gh_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Si decomponga questa velocità v_1 in due, una c_2 parallela al piano s_2, l'altra perpendicolare al medesimo, sarà

$$c_2 = v_1 \cos\alpha_1 = (2gh_1)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha_1,$$

per tanto il grave comincierà la sua discesa lungo il piano s_2 colla velocita iniziale c_2, quindi la sua velocità v_2, dopo avere percorso tutto questo piano, per la prima delle (1), sarà

$$v_2 = (2gh_2 + c^2_2)^{\frac{1}{2}} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_2 + h_1 \cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}},$$

Si decomponga similmente questa velocità v_2 in due, una c_3 lungo il piano s_3, l'altra perpendicolare al medesimo, avremo

$$c_3 = v_2 \cos\alpha_2 = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_2 + h_1 \cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha_2,$$

Digitized by Google

e questa sarà la velocità iniziale colla quale incomincerà il grave a discendere lungo il piano s_3; quindi la velocità v_3 alla fine di questa discesa, dovrà per la prima delle (1), essere

$$v_3 = (2gh_3 + c_3^2)^{\frac{1}{2}} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_3 + h_2\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Similmente, per avere la velocità v_4 del grave medesimo alla fine della sua discesa pel piano inclinato s_4, dovremo decomporre al solito la v_3 in due, una c_4 a questo piano parallela, che sarà la velocità iniziale, l'altra perpendicolare ad esso; quindi avremo

$$c_4 = v_3\cos\alpha_3 = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_3 + h_2\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_3\,,$$

e perciò, mediante la prima della (1), sarà

$$v_4 = (2gh_4 + c_4^2)^{\frac{1}{2}} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_4 + h_3\cos^2\alpha_3 + h_2\cos^2\alpha_3\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_3\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Laonde, se decompongasi la penultima velocità v_{n-1} in due, una c_n parallela all'ultimo piano s_n, la quale sarà la velocità iniziale per questo piano, l'altra perpendicolare al medesimo, avremo generalmente le due seguenti formule

$$(2)\left\{\begin{aligned} c_n &= v_{n-1}\cos\alpha_{n-1} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_{n-1} + h_{n-2}\cos^2\alpha_{n-2} + h_{n-3}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} \\ &\quad + h_{n-4}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\cos^2\alpha_{n-4} + \ldots + h_1\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ldots\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{n-1}\,, \\ v_n &= (2gh_n + c_n^2)^{\frac{1}{2}} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_n + h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-1} + h_{n-2}\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} \\ &\quad + h_{n-3}\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} + \ldots + h_1\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ldots\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

La prima di queste ci porge

$$v_{n-1} : c_n = 1 : \cos\alpha_{n-1}\,;$$

vale a dire, la velocità del grave alla fine della sua discesa pel piano s_{n-1}, cioè per qualunque piano del sistema, è a quella che conserva incominciando a discendere lungo il piano contiguo s_n, come il seno totale, al coseno dell'angolo dei due piani contigui s_{n-1} ed s_n. L'una e l'altra poi delle (2) ci offrono rispettivamente come calcolare tanto la velocità iniziale, quanto la finale, per un sistema di piani contigui, quando sieno cogniti gli angoli che insieme fanno, e le altezze loro.

Se i piani contigui formino ciascuno fra loro lo stesso angolo, avremo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} (= \alpha)$, quindi le (2) si ridurranno alle

Digitized by Google

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
c_n &= v_{n-1}\cos\alpha = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_{n-1} + h_{n-2}\cos^2\alpha + h_{n-3}\cos^4\alpha \\
&\qquad + h_{n-4}\cos^6\alpha + \ldots + h_1\cos^{2(n-2)})^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\ , \\
v_n &= (2gh_n + c^2_n)^{\frac{1}{2}} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_n + h_{n-1}\cos^2\alpha \\
&\qquad + h_{n-2}\cos^4\alpha + h_{n-3}\cos^6\alpha + \ldots + h_1\cos^{2(n-1)}\alpha)^{\frac{1}{2}}\ ,
\end{aligned}\right.
$$

Se i piani medesimi abbiano ciascuno la stessa inclinazione all'orizzonte, vale a dire se costituiscano un sol piano, avremo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = o\ ,$$

e perciò dalla seconda tanto delle (2) quanto delle (3), si avrà

$$(4)\quad u_n = (2gh_n + c^2_n)^{\frac{1}{2}} = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_n + h_{n-1} + h_{n-2} + \ldots + h_1)^{\frac{1}{2}} = (2g\mathrm{H})^{\frac{1}{2}}\ ,$$

vale a dire la velocità u_n alla fine della caduta per un piano di altezza

$$h_n + h_{n-1} + h_{n-2} + \ldots + h_1 = \mathrm{H}$$

è dovuta, come già sapevamo, all'altezza H del piano medesimo; cosicchè in tal caso $\frac{u_n}{v_n} = 1$. Dividendo l'una per l'altra la seconda delle (2) e la (4), avremo il rapporto delle velocità v_n, u_n alla fine della discesa per un sistema di n piani contigui, e per l'altezza totale del sistema stesso.

Essendo

$$\cos\alpha = 1 - \text{sen.v.}\alpha\ ,$$

dalla seconda delle (2) avremo

$$
\begin{aligned}
(5)\quad v_n = (2g)^{\frac{1}{2}}\ [h_n &+ h_{n-1}(1-\text{sen.v.}\alpha_{n-1})^2 + h_{n-2}(1-\text{sen.v.}\alpha_{n-1})^2(1-\text{sen.v.}\alpha_{n-2})^2 \\
&+ \ldots + h_1(1-\text{sen.v.}\alpha_{n-1})^2(1-\text{sen.v.}\alpha_{n-2})^2 \ \ldots\ (1-\text{sen.v.}\alpha_1)^2]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Ma dalla trigonometria si ha

$$
\begin{aligned}
\text{sen.v.}\alpha &= 1 - \cos\alpha = 1 - \sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)} = \\
&= \frac{[1-\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)}]\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{[1-\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)}]\text{sen}^2\alpha}{1-1+\text{sen}^2\alpha} = \\
&= \frac{[1-\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)}]\text{sen}^2\alpha}{[1+\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)}][1-\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)}]} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{1+\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha)}}\ ,
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$\text{sen.v.}\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}\ .$$

Digitized by Google

Perciò se l'angolo α è infinitesimo di prim'ordine, il seno verso di quest'angolo sarà infinitesimo di second'ordine; quindi sarà esso trascurabile rispetto qualunque grandezza finita: ma nelle curve l'angolo α è infinitesimo di prim'ordine; dunque, poichè una curva risulta di latercoli rettilinei ed infinitamente piccoli, perciò se la precedente formola (5) riferiscasi ad una curva piana, dovrà cangiarsi nella

$$(6) \qquad u_n = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_n + h_{n-1} + h_{n+1} + \ldots + h_1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2gH)} ,$$

essendo H l'altezza della curva medesima. Ciò vale a dire che se un grave scenda per una curva piana qualunque, riceverà sul fine della discesa, quella velocità che avrebbe conseguita, cadendo liberamente per l'altezza della curva stessa.

Mediante la quarta delle (1), e la seconda dalle (2) facilmente abbiamo ancora

$$(7) \quad v_n = (2g)^{\frac{1}{2}}(s_n \operatorname{sen}\varphi_n + s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha_{n-1} + s_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}$$
$$+ \ldots + s_1\operatorname{sen}\varphi_1\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ldots\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}} ;$$

perciò date le lunghezze dei piani, gli angoli che i medesimi fanno colla orizzontale, oltre quelli tra loro, potremo calcolare, anche per la (7), la velocità del grave alla fine della discesa. Nel caso di $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} (= \alpha)$, sarà

$$v_n = (2g)^{\frac{1}{2}}(s_n\operatorname{sen}\varphi_n + s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha + s_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}\cos^4\alpha + \ldots$$
$$+ s_1\operatorname{sen}\varphi_1\cos^{2(n-1)}\alpha)^{\frac{1}{2}} .$$

Paragonando la (6) colla (7), avremo una seconda espressione del rapporto fra le velocità finali, una per l'altezza, l'altra per la lunghezza, del sistema dei piani contigui. Nel caso in cui si abbia

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n , \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_{n-1} = o ,$$

cioè nel caso di un sol piano, la (7) riducesi evidentemente alla (6); perciò concluderemo che in questo caso il rapporto medesimo sarà $\dfrac{u_n}{v_n} = 1$, come già si conosceva.

§. V.

Essendo $c_1 (= o)$, c_2, c_3, ..., c_n le velocità iniziali, ossia quelle che il grave possiede al principio della discesa pei rispettivi piani s_1, s_2, s_3, ..., s_n,

Digitized by Google

chiaro apparisce che le perdite di velocità che il grave stesso incontra nel successivo passaggio da un piano all'altro, saranno

$$v_1 - c_2\,,\quad v_2 - c_3\,,\quad v_3 - c_4\,,\ \ldots\,,\ v_{n-1} - c_n\,,$$

e perciò dalle precedenti formule avremo

$$(8)\ \begin{cases} v_1 - c_2 = v_1(1-\cos\alpha_1) = (1-\cos\alpha_1)(2gh_1)^{\frac{1}{2}}\,, \\ v_2 - c_3 = v_2(1-\cos\alpha_2) = (1-\cos\alpha_2)(2g)^{\frac{1}{2}}(h_2 + h_1\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\,, \\ v_3 - c_4 = v_3(1-\cos\alpha_3) = (1-\cos\alpha_3)(2g)^{\frac{1}{2}}(h_3 + h_2\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_{n-1} - c_n = v_{n-1}(1-\cos\alpha_{n-1}) = (1-\cos\alpha_{n-1})(2g)^{\frac{1}{2}}(h_{n-1} + h_{n-2}\cos^2\alpha_{n-2} \\ \quad + h_{n-3}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} + \ldots + h_1\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ldots\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Per tanto, espressa con Σ la somma delle velocità perdute dal grave nel discendere lungo il sistema dei piani contigui, sarà

$$(9)\ \Sigma = v_1(1-\cos\alpha_1) + v_2(1-\cos\alpha_2) + v_3(1-\cos\alpha_3) + \ldots + v_{n-1}(1-\cos\alpha_{n-1}).$$

Quindi se le velocità $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ si prendano come raggi, e nei diversi corrispondenti circoli si misurino gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_{n-1}$, potremo concludere dalla precedente formula, che la somma delle velocità perdute da un grave discendente per una serie di piani congiunti fra loro, e diversamente inclinati alla orizzontale, uguaglia la somma dei seni versi corrispondenti agli angoli medesimi, presi nei circoli aventi come raggi le velocità che il grave possiede alla fine di ciascun piano, dal primo fino al penultimo. Nel caso di $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} (= \alpha)$, sarà

$$\Sigma = (1-\cos\alpha)(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1})\,.$$

Inoltre se vogliansi considerare il caso di un sol piano avremo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0\,,$$

e nel caso di una curva dovremo avere

$$\text{sen.v.}\alpha_1 = \text{sen.v.}\alpha_2 = \text{sen.v.}\alpha_3 = \ldots = \text{sen.v.}\alpha_{n-1} = 0\,;$$

dunque per l'uno e l'altro caso dovrà essere

$$\Sigma = 0\,,$$

cioè non vi sarà velocità perduta nella discesa del grave, tanto per un piano inclinato, quanto per una curva.

Digitized by Google

§. VI.

Chiamando

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n,$$

i tempi che impiega il grave a percorrere gli spazi

$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

ed avuto riguardo alle già cognite velocità iniziali, dalla seconda delle (1) avremo

$$t_1 = \frac{v_1}{g\text{sen}\varphi_1}, \quad t_2 = \frac{v_2 - c_2}{g\text{sen}\varphi_2}, \quad t_3 = \frac{v_3 - c_3}{g\text{sen}\varphi_3}, \ldots, \quad t_n = \frac{v_n - c_n}{g\text{sen}\varphi_n}.$$

Perciò fatto

$$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

si otterrà il tempo totale t, impiegato dal mobile a discendere per tutto il sistema dei piani contigui, espresso dalla

$$(10)\quad t = \frac{1}{g}\left(\frac{v_1}{\text{sen}\varphi_1} + \frac{v_2}{\text{sen}\varphi_2} + \ldots + \frac{v_{n-1}}{\text{sen}\varphi_{n-1}} + \frac{v_n}{\text{sen}\varphi_n} - \frac{c_2}{\text{sen}\varphi_2} - \frac{c_3}{\text{sen}\varphi_3} - \ldots - \frac{c_n}{\text{sen}\varphi_n}\right).$$

Nel caso in cui fosse ciascun piano egualmente inclinato all' orizzonte, cioè nel caso di un sol piano, si avrebbero le

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n \; (=\varphi),$$

$$c_2 = v_1, \quad c_3 = v_2, \quad c_4 = v_3 \ldots c_n = v_{n-1}, \quad v_n \; (=v),$$

e la (10) si convertirà nella

$$t = \frac{v_n}{g\text{sen}\varphi_n} = \frac{v}{g\text{sen}\varphi},$$

formula già cognita pel caso medesimo.

Mediante la quarta delle (1), potremo anche avere dalla (10) la

$$(11)\qquad t = \frac{1}{g}\left(\frac{s_1 v_1}{h_1} + \frac{s_2 v_2}{h_2} + \ldots + \frac{s_n v_n}{h_n} - \frac{s_2 c_2}{h_2} - \frac{s_3 c_3}{h_3} - \ldots - \frac{s_n c_n}{h_n}\right),$$

nella quale se pongasi

$$\frac{s_1}{h_1} = \frac{s_2}{h_2} = \ldots = \frac{s_n}{h_n}\left(=\frac{s}{h}\right),$$

si avrà chiaramente

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n (=\varphi),$$

cioè pel caso di un sol piano sarà

$$t = \frac{s_n v_n}{g h_n} = \frac{v_n}{g \operatorname{sen}\varphi_n} = \frac{v}{g \operatorname{sen}\varphi} .$$

Inoltre dalla seconda delle (1) abbiamo pure

$$v_1 = g t_1 \operatorname{sen}\varphi_1 ,$$

$$v_2 = c_2 + g t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 = v_1 \cos\alpha_1 + g t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 = g t_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\alpha_1 + g t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 ,$$

$$v_3 = c_3 + g t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 = v_2 \cos\alpha_2 + g t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 =$$
$$= g t_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + g t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\alpha_2 + g t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 ,$$

$$v_4 = c_4 + g t_4 \operatorname{sen}\varphi_4 = v_3 \cos\alpha_3 + g t_4 \operatorname{sen}\varphi_4 =$$
$$g t_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + g t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + g t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 \cos\alpha_3 + g t_4 \operatorname{sen}\varphi_4 ,$$

. . . .

$$(12)\quad v_n = c_n + g t_n \operatorname{sen}\varphi_n = \left\{ \begin{array}{l} + g t_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_{n-2} \ \ldots\ \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 \\ + g t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_{n-2} \ \ldots\ \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 \\ + g t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_{n-2} \ \ldots\ \cos\alpha_4 \cos\alpha_3 \\ + \ \ldots\ldots\ldots \\ + g t_{n-1} \operatorname{sen}\varphi_{n-1} \cos\alpha_{n-1} + g t_n \operatorname{sen}\varphi_n , \end{array} \right.$$

ove la serie dei termini che precede l' nesimo, costituisce una seconda espressione della velocità iniziale c_n del grave, a lui dovuta quando incomincia la sua discesa pel piano nesimo.

Se il sistema riducasi ad un sol piano, avremo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = o , \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n \,(= \varphi) ,$$

e dalla (12) sarà

$$v_n \,(= v) = g(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \operatorname{sen}\varphi = g t \operatorname{sen}\varphi ,$$

formula già nota.

Se i piani sieno disposti per modo che ogniuno faccia col suo contiguo sempre lo stesso angolo, avremo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} \,(= \alpha) ,$$

quindi la (12) si cangerà nella

$$(13)\quad v_n = g(t_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos^{n-1}\alpha + t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos^{n-2}\alpha + t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 \cos^{n-3}\alpha + \ldots$$
$$+ t_{n-1} \operatorname{sen}\varphi_{n-1} \cos\alpha + t_n \operatorname{sen}\varphi_n).$$

Digitized by Google

Se in questo caso vogliasi trovare quale debba essere l'angolo α, onde la velocità finale v_n sia nulla per valori di $\cos\alpha$, dovremo eguagliare a zero il secondo membro della (13), e risolverla rapporto a $\cos\alpha$. Quindi si vede in generale che l'angolo α non potrà essere mai positivo per annullare questa equazione, laonde α dovrà essere sempre maggiore di 90.° Così p. es. nel caso di $n=3$, cioè di un sistema composto di tre soli piani contigui, avremo

$$\cos^2\alpha + \frac{t_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{t_1 \operatorname{sen}\varphi_1}\cos\alpha + \frac{t_3 \operatorname{sen}\varphi_3}{t_1 \operatorname{sen}\varphi_1} = o\,,$$

e la condizione per l'annullamento della velocità finale sarà

$$\cos\alpha = \frac{-t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \pm \sqrt{(t_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi_2 - 4t_1 t_3 \operatorname{sen}\varphi_3 \operatorname{sen}\varphi_1)}}{2t_1 \operatorname{sen}\varphi_1}\,,$$

valore che, qualunque segno si prenda, sarà sempre o negativo, od immaginario.

§. VII.

Dalla terza delle (1) abbiamo

$$s_1 = \frac{g t_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1}{2}\,, \quad s_2 = c_2 t_2 + \frac{g t_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2}{2}\,, \quad s_3 = c_3 t_3 + \frac{g t_3^2 \operatorname{sen}\varphi_3}{2}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \quad s_n = c_n t_n + \frac{g t_n^2 \operatorname{sen}\varphi_n}{2}\,;$$

quindi facendo

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n\,,$$

avremo

$$(14)\quad s = \tfrac{1}{2} g(t_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1 + t_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2 + t_3^2 \operatorname{sen}\varphi_3 + \ldots + t_n^2 \operatorname{sen}\varphi_n) + \tfrac{1}{2}(2c_2 t_2 + 2c_3 t_3 + 2c_4 t_4 + \ldots + 2c_n t_n)\,.$$

Se abbiasi

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n \, (=\varphi),$$

il sistema degli n piani contigui, si ridurrà in un sol piano, ed avremo

$$(15)\quad s = (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \ldots + t_n^2)\frac{g \operatorname{sen}\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}(2c_2 t_2 + 2c_3 t_3 + \ldots + 2c_n t_n)\,.$$

Ma in questo caso dalla (12) abbiamo le

Digitized by Google

$$c_2 = v_1 = t_1\, g\mathrm{sen}\varphi,$$
$$c_3 = v_2 = (t_1 + t_2) g\mathrm{sen}\varphi\,,$$
$$c_4 = v_3 = (t_1 + t_2 + t_3) g\mathrm{sen}\varphi\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_n = v_{n-1} = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1})\, g\mathrm{sen}\varphi\,;$$

quindi anche le

$$2c_2t_2 = 2t_1t_2 g\mathrm{sen}\varphi\,,$$
$$2c_3t_3 = 2(t_1t_3 + t_2t_3) g\mathrm{sen}\varphi\,,$$
$$2c_4t_4 = 2\,(t_1t_4 + t_2t_4 + t_3t_4)\, g\mathrm{sen}\varphi\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2c_nt_n = 2\,(t_1t_n + t_2t_n + t_3t_n + \ldots + t_{n-1}t_n)\, g\mathrm{sen}\varphi\,.$$

Perciò, sostituendo questi valori nella (15), avremo

$$s = (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_4^2 + 2t_1t_2 + 2t_1t_3 + \ldots + 2t_1t_n + 2t_{n-1}t_n)\,\frac{g\mathrm{sen}\varphi}{2}\,,$$

ovvero

$$s = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n)^2\,\frac{g\mathrm{sen}\varphi}{2} = \frac{gt^2\mathrm{sen}\varphi}{2}\,,$$

formula che già si conosceva pel caso di un sol piano.

Se poi si volesse il valore di s nel caso in cui gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ dei piani contigui fossero eguali fra loro, allora, chiamando α uno qualunque dei medesimi, bisognerebbe nella (14) sostituire i seguenti valori, tratti dalla prima delle (2), che sono:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} c_2 &= (2g)^{\frac{1}{2}} h_1^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \\ c_3 &= (2g)^{\frac{1}{2}} (h_2 + h_1\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \\ c_4 &= (2g)^{\frac{1}{2}} (h_3 + h_2\cos^2\alpha + h_1\cos^4\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n &= (2g)^{\frac{1}{2}}(h_{n-1} + h_{n-2}\cos^2\alpha + h_{n-3}\cos^4\alpha + h_{n-4}\cos^6\alpha + \\ &\quad \ldots + h_1\cos^{2(n-2)}\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Inoltre dalla (12), come ivi fu già indicato, possiamo stabilire

$$(17)\quad c_n = \begin{cases} gt_1\text{sen}\varphi_1\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_1 \\ +gt_2\text{sen}\varphi_2\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_2 \\ +gt_3\text{sen}\varphi_3\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_3 \\ +\ .\ .\ .\ .\ .\ +gt_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\ . \end{cases}$$

Quindi nel caso in cui si abbia

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ .\ .\ . = \alpha_{n-1} (= \alpha)\ ,$$

sarà

$$(18)\quad c_n = \begin{cases} g(t_1\text{sen}\varphi_1\cos^{n-1}\alpha + t_2\text{sen}\varphi_2\cos^{n-2}\alpha \\ + t_3\text{sen}\varphi_3\cos^{n-3}\alpha +\ .\ .\ .\ + t_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha)\ , \end{cases}$$

e se gli $n-1$ piani che precedono l' $n$esimo del sistema, riducansi ad un solo, avremo

$$c_n (= v_{n-1}) = g(t_1 + t_2 +\ .\ .\ .\ + t_{n-1})\text{sen}\varphi = gt'\text{sen}\varphi\ .$$

Sostituendo nella (18) successivamente 2, 3, 4,... in luogo di n, avremo le

$$(19)\quad \begin{cases} c_2 = gt_1\text{sen}\varphi_1\cos\alpha\ , \\ c_3 = g(t_1\text{sen}\varphi_1\cos^2\alpha + t_2\text{sen}\varphi_2\cos\alpha)\ , \\ c_4 = g(t_1\text{sen}\varphi_1\cos^3\alpha + t_2\text{sen}\varphi_2\cos^2\alpha + t_3\text{sen}\varphi_3\cos\alpha)\ , \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{cases}$$

Questi valori, cui facilmente si possono ridurre quei dalle (16), sostituiti nella (14), ci daranno quello di s, nel caso degli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ uguali fra loro, più semplicemente di quello sia per la sostituzione delle (16) nella stessa (14).

§. VIII.

Dato il tempo t per la caduta verticale H di un grave dalla quiete, sarà

$$H = \frac{gt^2}{2}\ ;$$

quindi fatto

$$t = t_1 + t_2 + t_3 +\ .\ .\ .\ + t_n\ ,$$

Digitized by Google

potremo dalla (14) conoscere lo spazio s percorso dal grave stesso, lungo il sistema degli n piani contigui nel tempo medesimo t; e così conoscere la contemporanea località dei due corpi, uno sull'altezza H, l'altro sulla lunghezza spezzata del sistema degli n piani contigui. La soluzione però di questo problema nell' attuale generalità riesce indeterminata; ed ancorchè suppongansi cogniti gli angoli tutti, nulladimeno potrà il problema stesso ricevere tante soluzioni, quanti sono i modi per ispezzare il tempo t negli n tempi $t_1, t_2, \ldots, t_n$: questi modi poi riceveranno una limitazione, se tale spezzamento si voglia subordinato ad una data legge. Nel caso di un solo piano, le (14), e (15) mediante le (19), si riducono alla

$$s = \frac{gt^2}{2}\operatorname{sen}\varphi,$$

che paragonata colla $h = \frac{gt^2}{2}$, ci porge

$$s : h = \operatorname{sen}\varphi : 1,$$

rapporto già cognito, dal quale per la elementare geometria possiamo assegnare la località contemporanea dei due corpi, uno sull' altezza l' altro sulla lunghezza del piano medesimo, quando sieno insieme partiti dalla quiete, come si trova esposto in tutte le meccaniche. Però molto meglio, ed egualmente facile sarebbe, presentare la soluzione del problema stesso come un corollario del seguente, assai più generale, cioè: Trovare come dipendono fra loro i due spazi s, s', percorsi ad un tempo da due corpi, sopra le lunghezze di due piani, rispettivamente inclinati cogli angoli φ, φ' all' orizzonte, supponendo c, c' le velocità loro iniziali. Le formule acconcie alla soluzione di questo problema sono

$$s = ct + \frac{gt^2\operatorname{sen}\varphi}{2}, \quad s' = c't + \frac{gt^2\operatorname{sen}\varphi'}{2},$$

che coincidono colla terza delle (1). Eliminando il t da queste avremo, a riduzioni compiute, la seguente

$$(20)\quad s^2 + \left(\frac{2cc'}{g\operatorname{sen}\varphi'} - \frac{2s'\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi'} - \frac{2c'^2\operatorname{sen}\varphi}{g\operatorname{sen}^2\varphi'}\right)s + \frac{s'^2\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi'} - \frac{2c^2s'}{g\operatorname{sen}\varphi'} + \frac{2cc's'\operatorname{sen}\varphi}{g\operatorname{sen}^2\varphi'} = 0,$$

che rappresenta la più generale possibile relazione fra gli spazi rettilinei s, s'. Pongasi ora che sia $c = c'$, la (20) si cangerà nella

$$(21)\quad s^2 + \left(\frac{2c^2}{g\operatorname{sen}\varphi'} - \frac{2s'\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi'} - \frac{2c^2\operatorname{sen}\varphi}{g\operatorname{sen}^2\varphi'}\right)s + \frac{s'^2\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi'} - \frac{2c^2s'}{g\operatorname{sen}\varphi'} + \frac{2c^2s'\operatorname{sen}\varphi}{g\operatorname{sen}^2\varphi'} = 0;$$

Digitized by Google

e se inoltre abbiasi $\varphi=\varphi'$, questa diverrà

$$s^2+s'^2-2ss'=o \quad , \tag{22}$$

che viene soddisfatta da $s=s'$, come anche senza calcolo si comprende.

Pongasi nella (20) $c=c'=o$, avremo la

$$s^2-\frac{2s'\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi'}s+\frac{s'^2\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi'}=o,$$

donde

$$s=\frac{s'\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi'} \; . \tag{23}$$

Questa formula c' insegna che nel caso dei due piani ora da noi considerati, se dall'estremo inferiore della lunghezza s, che supponiamo cognita, si guidi una retta incontrando l'altro piano in guisa, che faccia col medesimo l'angolo φ del primo, la lunghezza s' compresa fra questo incontro, e l' origine comune dei due piani, sarà percorsa in tempo eguale a quello, impiegato dal grave stesso a percorrere la lunghezza s sul primo.

Nel caso di $\varphi'=90°$, avremo dalla (23) la

$$s=s'\operatorname{sen}\varphi(=h\operatorname{sen}\varphi) \quad , \tag{24}$$

che appunto si riferisce al caso comunemente considerato nelle istituzioni di meccanica, il più semplice fra quelli compresi nella (20), ora da noi dedotta.

Dalla (24) si deduce, che in un quadrilatero con due angoli retti, uno incontro l'altro, quante volte la diagonale che ai medesimi si oppone sia verticale, un grave discenderà per uno qualunque de' suoi quattro lati, nel tempo stesso in cui discende per la intera diagonale medesima. Ciò vale a dire che qualunque delle corde di un circolo, congiunte fra loro ad angolo retto, ed insistenti sul suo diametro verticale, sarà percorsa da un grave che scende per essa, in un tempo eguale a quello che impiegherebbe il grave medesimo a cadere per tutto quel diametro.

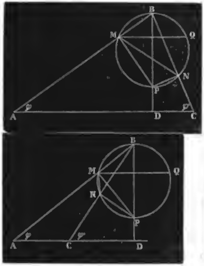
Inoltre poichè questa verità è indipendente dalla lunghezza della corda percorsa, così dovrà sussistere ancorchè la corda medesima divenga infinitamente piccola; e per conseguenza dovrà in questo caso, la componente della gravità che agisce secondo questa piccolissima lunghezza, non essere più quantità finita.

Si deduce altresì dalla stessa formula, che il tempo impiegato da un grave a discendere pei due lati contigui di un quadrilatero, congiunti fra loro ad angolo retto, è doppio di quello impiegato dal grave stesso a cadere per la

Digitized by Google

diagonale verticale dello stesso quadrilatero, sulla quale insistono quei due lati. Ciò diviene chiaro quando si rifletta, che giunto il grave alla fine del primo lato, ivi perderà tutta la velocità che acquistato aveva nella discesa medesima, e percorrerà il secondo lato contiguo al primo, partendo senza velocità iniziale.

Si abbiano due piani inclinati AB, BC (fig. 1), i quali facciano uno l'angolo φ, l'altro l'angolo φ' coll'orizzonte: sia BD l'altezza comune di questi piani; se da un punto qualunque P di quest'altezza, si guidino sopra l'uno e l'altro le due rette PM, PN, perpendicolari ai piani medesimi, per la (24) gli spazi BM, BP, BN, saranno percorsi nel medesimo tempo da un grave che cada per essi. Ma dalla (23) abbiamo



(fig. 1).

$$BM : BN = \text{sen}\varphi : \text{sen}\varphi',$$

e per la trigonometria

$$BC : AB; = \text{sen}\varphi : \text{sen}\varphi',$$

perciò

$$BM : BN = BC : AB .$$

Dunque i triangoli MBN, ABC sono simili fra loro, perchè hanno un angolo B comune, formato da lati proporzionali. Di qui si conclude il seguente teorema di geometria: Se da un punto qualunque P dell'altezza BD, comune a due triangoli rettangoli ABD, CBD, si conducano sulle ipotenuse AB, BC due perpendicolari PM, PN, e si guidi la retta MN, il triangolo ABC sarà simile all'altro MBN, formato sulle ipotenuse medesime.

Può dimostrarsi questa verità senza il soccorso della meccanica, ma colla semplice geometria, nel modo seguente. Dal punto P sull'altezza comune ai due triangoli rettangoli ABD, CBD, si guidino le due perpendicolari PM, PN sulle rispettive ipotenuse, si conduca la MN, si prenda BP come diametro, e con questo si descriva un circolo, il quale passerà pei punti B, M, N, P; giacchè gli angoli in M ed in N sono retti per costruzione, ed insistono sugli estremi del diametro BP. Si guidi la MQ parallela ad AD; l'angolo BMQ viene misurato

Digitized by Google

dalla metà dell' arco BQ = BM, non altrimenti che l' angolo MNB; dunque avremo

$$MNB = BMQ = BAD = \varphi .$$

Inoltre, poichè l'angolo MBN si trova essere comune ai due triangoli ABC, MBN; perciò sarà eziandio

$$BMN = ACB ,$$

ed i medesimi due triangoli saranno simili fra loro, come ci potremmo dimostrare.

Nel caso di

$$\alpha_1 = \alpha_n = \ldots = \alpha_{n-1} (= \alpha) ,$$

già più volte contemplato, avremo eziandio

$$\varphi_1 = \alpha + \varphi_2 , \quad \varphi_2 = \alpha + \varphi_3 , \quad \ldots , \quad \varphi_{n-1} = \alpha + \varphi_n$$

dalle quali si ottiene

$$\alpha = \frac{1}{n-1} (\varphi_1 - \varphi_n) ; \tag{25}$$

e mediante questo valore potremo eliminare l' angolo α dalle formule (3), dalla ultima colla quale si assegna il valore di v_n nel §. IV, da quella che dà il valore di Σ nel §. V, dalla (13), dalla (16), e dalla (18), le quali tutte si riferiscono al caso qui contemplato.

Sarà poi facile ad ognuno riconoscere, che le formule dei precedenti paragrafi, comprendono anche il caso in cui la discesa del grave cominci con una data velocità iniziale c_2. Basterà per questo, che nelle formule stesse facciasi $v_1 = o$, ritenendo h_1 ed α_1 tali da soddisfare alla equazione

$$c_2 = (2gh_1)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha_1 .$$

In tal caso i piani contigui saranno di numero $n-1$ invece di n, cioè incomincerанno dal piano s_2, e termineranno col piano s_n.

MOTO ASCENDENTE.

§. IX.

Le formule del moto verticale uniformemente ritardato, sono, come sappiamo dalla dinamica, le seguenti

$$w^2 = \gamma^2 - 2gs , \quad w = \gamma - gt , \quad s = \gamma t - \frac{gt^2}{2} ,$$

dalle quali, se porremo in esse $g\mathrm{sen}\varphi$ in vece di g, avremo le

Digitized by Google

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{l} w^2 = \gamma^2 - 2gs\,\mathrm{sen}\varphi = \gamma^2 - 2gh \;, \\[2mm] w = \gamma - gt\,\mathrm{sen}\varphi \;, \quad s = \gamma t - \dfrac{gt^2\mathrm{sen}\varphi}{2} \;, \end{array} \right.$$

che appartengono al moto ascendente di un grave per un piano inclinato, essendo γ la iniziale velocità, e w la finale pel tempo t.

Incominciando sempre dall'ultimo piano inferiore s_n, sieno

$$\gamma_n \,,\; \gamma_{n-1} \,,\; \gamma_{n-2} \,,\; \ldots \,,\; \gamma_1$$

le velocità iniziali del grave al principio della salita pei rispettivi pianl, di cui le lunghezze sono come prima

$$s_n \,,\; s_{n-1} \,,\; \ldots \,,\; s_1 \;;$$

e rappresentino rispettivamente

$$w_n \,,\; w_{n-1} \,,\; w_{n-2} \,,\; \ldots \,,\; w_1 \;;$$

le velocità del grave stesso, all'estremo superiore di ciascuno dei piani medesimi, le quali potrebbero anche dirsi velocità finali.

Ritenute nel resto le denominazioni già stabilite, per la discesa lungo questo sistema di piani contigui, supponiamo che un grave colla velocità iniziale γ_n incominci a salire, percorrendo prima il piano s_n, poscia il suo contiguo s_{n-1}, e così di seguito, sempre più avvicinandosi ad ascendere per l'ultimo piano s_1. Giunto il grave al sommo del piano s_n, primo in questo caso ad essere asceso, la sua velocità w_n, per la prima delle (26), verrà espressa da

$$w_n = (\gamma^2_n - 2gs_n\mathrm{sen}\varphi_n)^{\frac{1}{2}} = (\gamma^2_n - 2gh_n)^{\frac{1}{2}} \;.$$

Si decomponga questa velocità w_n in due, una γ_{n-1} parallela al piano s_{n-1}, l'altra perpendicolare al piano medesimo, sarà

$$\gamma_{n-1} = w_n\cos\alpha_{n-1} = (\gamma^2_n - 2gh_n)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{n-1} \;;$$

laonde il grave incomincierà la sua salita pel piano s_{n-1}, animato dalla velocità iniziale γ_{n-1}, e perciò la sua velocità w_{n-1}, alla fine di questa salita sarà, per la prima delle (26), rappresentata dalla

$$w_{n-1} = (\gamma^2_{n-1} - 2gh_{n-1})^{\frac{1}{2}} = (\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1} - 2gh_n\cos^2\alpha_{n-1} - 2gh_{n-1})^{\frac{1}{2}} \,,$$

Si decomponga questa velocità w_{n-1} in due, una γ_{n-2} parallela al piano s_{n-2}, l'altra perpendicolare al medesimo; sarà

$$\gamma_{n-2} = w_{n-1}\cos\alpha_{n-2} = (\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1} - 2gh_n\cos^2\alpha_{n-1} - 2gh_{n-1})^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{n-2} \,,$$

Digitized by Google

che darà la velocità iniziale del grave per salire lungo il piano s_{n-1}, e la velocità w_{n-2} alla fine della salita per questo piano, verrà, per la prima delle (26), rappresentata da

$$w_{n-2} = (\gamma^2_{n-2} - 2gh_{n-2})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (\gamma^2_n \cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} - 2gh_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} - 2gh_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} - 2gh_{n-2})^{\frac{1}{2}}\,.$$

Operando similmente avremo la componente γ_{n-3} di w_{n-2}, parallela al piano s_{n-3}, espressa da

$$\gamma_{n-3} = w_{n-2}\cos\alpha_{n-3} =$$

$$= (\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} - 2gh_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} - 2gh_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} - 2gh_{n-2})^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{n-3}\ ;$$

quindi la velocità w_{n-3}, alla fine della salita pel piano s_{n-3}, sarà espressa come siegue

$$w_{n-3} = (\gamma^2_{n-3} - 2gh_{n-3})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= [\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} - 2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}$$

$$+ h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} + h_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} + h_{n-3})]^{\frac{1}{2}}.$$

Ora potremo stabilire generalmente che al principio del piano qualunque s_{n-m} del sistema, la velocità iniziale γ_{n-m} sarà espressa dalla

$$(27)\qquad \gamma_{n-m} = w_{n-m+1}\cos\alpha_{n-m} = \left\{\begin{array}{l} [\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ \ldots\ \cos^2\alpha_{n-m+1} \\ \quad - 2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ \ldots\ \cos^2\alpha_{n-m+1} \\ \quad + h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ \ldots\ \cos^2\alpha_{n-m+1} \\ \quad + \ \ldots\ + h_{n-m+1})]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{n-m}\ , \end{array}\right.$$

nella qual formula il numero dei termini sarà $m+1$, e potrà m ricevere i valori tutti da 1 sino ad $n-1$ inclusivamente. Dando ad m il valore di $n-1$, avremo la velocità iniziale γ_1 del grave ascendente al principio del piano ultimo superiore s_1, espressa da

$$(28)\qquad \gamma_1 = w_2\cos\alpha_1 = \left\{\begin{array}{l} [\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ \ldots\ \cos^2\alpha_2 \\ \quad - 2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ \ldots\ \cos^2\alpha_2 \\ \quad + h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ \ldots\ \cos^2\alpha_2 \\ \quad + \ \ldots\ + h_2)]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1\ . \end{array}\right.$$

Digitized by Google

In simil guisa troveremo generalmente che, alla fine del piano qualunque s_{n-m} del sistema, la velocità finale w_{n-m} sarà espressa dalla

$$(29)\quad w_{n-m}=(\gamma^2_{n-m}-2gh_{n-m})^{\frac{1}{2}}=\left\{\begin{array}{l}[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_{n-m}\\ \quad -2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_{n-m}\\ \quad +h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_{n-m}\\ \quad +\ .\ .\ .\ .\ +h_{n-m})]^{\frac{1}{2}}\ .\end{array}\right.$$

nella quale il numero dei termini sarà $m+2$, potendo m ricevere i valori tutti da o sino ad $n-1$ inclusivamente. Quando facciasi $m=n-1$, si avrà la velocità w_1 corrispondente alla fine dell' ultimo superiore s_1 dei piani contigui, espressa dalla

$$(30)\qquad w_1=(\gamma_1{}^2-2gh_1)^{\frac{1}{2}}=\left\{\begin{array}{l}[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_1\\ \quad -2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_1\\ \quad +h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_1\\ \quad +\ .\ .\ .\ .\ +h_1)]^{\frac{1}{2}}\ ;\end{array}\right.$$

ognuno poi vede che qualunque di questi valori sarà immaginario, se il primo suo termine positivo, riesca inferiore alla somma di tutti gli altri negativi.

§. X

Supponiamo che la velocità iniziale γ_n primitiva del grave, sia quella che il medesimo avrebbe acquistata, scendendo per tutto il sistema degli n piani contigui, sino alla fine del piano s_n; ciò equivale a supporre

$$\gamma_n=v_n\ .$$

Sostituiscasi pertanto nella (30), in luogo di γ^2_n, il valore di v^2_n della seconda (2), troveremo

$$w_1=\left\{\begin{array}{l}[2g(h_n+h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-1}+h_{n-2}\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\\ \quad +h_{n-3}\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}+\ .\ .\ .\ .\\ \quad +h_1\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ ....\ \cos^2\alpha_1)\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ ....\ \cos^2\alpha_1\\ \quad -2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}...\cos^2\alpha_1\\ \quad +h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}...\cos^2\alpha_1+\ ...\ +h_1)]^{\frac{1}{2}}\ ,\end{array}\right.$$

Digitized by Google

espressione immaginaria, poichè la somma dei termini positivi, cioè di quelli che nascono dal moltiplicare il valore di v^2_n per la frazione

$$\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cos^2\alpha_1,$$

evidentemente risulta minore della somma di tutti gli altri negativi. Da ciò si conclude che se un grave scenda per una serie di piani contigui, e quindi colla velocità che acquistò alla fine di questa discesa, volta in contrario, facciasi ascendere per la serie dei piani medesimi, non potrà esso giungere a percorrerli tutti; giacchè la sua velocità ascendente sarà estinta prima di avere percorso l'ultimo superiore s_1 di questi piani.

Per assegnare il valore della velocità iniziale primitiva γ_n tale, che abbiasi $w_1 = o$, cioè che la velocità del grave salente, si annulli nell'estremo superiore del sistema, dovremo annullare il secondo membro della (30), dal che avremo

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma_n = (2g)^{\frac{1}{2}}\left(h_n + \frac{h_{n-1}}{\cos^2\alpha_{n-1}} + \frac{h_{n-2}}{\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}} + \right. \\ &\left. + \frac{h_{n-3}}{\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}} + \ldots + \frac{h_1}{\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ldots\cos^2\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

Paragonando questa espressione colla seconda delle (2), si avrà chiaramente

$$\gamma_n > v_n :$$

ciò conferma che, onde il grave salendo possa percorrere tutto il sistema degli n piani contigui, dovrà la sua primitiva iniziale velocità, essere maggiore di quella che il medesimo acquisterebbe se, partendo dalla quiete, discendesse per tutto il medesimo sistema, come già osservammo.

Sia k un intero qualunque, poichè abbiamo dalla trigonometria

$$\cos^k\alpha = (1 - \text{senv}\alpha)^k ,$$

perciò sostituendo questa formula tanto nella (31), quanto nella (30), quindi osservando che per qualunque curva il senv.α è un infinitesimo di second'ordine, avremo in questo caso dalla (31) la

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma_n = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_n + h_{n-1} + h_{n-2} + \ .\ .\ .\ + h_1)^{\frac{1}{2}} = (2gH)^{\frac{1}{2}}, \\ &\text{e dalla (30) la} \\ &w_1 = [\gamma^2_n - 2g(h_n + h_{n-1} + h_{n-2} + \ldots + h_1)]^{\frac{1}{2}} = (\gamma^2_n - u^2_n)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ &\text{perchè dalla (6) abbiamo anche} \\ &\gamma_n = u_n . \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Dunque per le (32) conosciamo che: Se un grave salga per una curva, con velocità iniziale primitiva, uguale a quella che avrebbe se discendesse per la medesima, partendo dalla quiete, questo grave salirà sino al principio della sua discesa, ed ivi la sua velocità diverrà nulla.

Se il sistema degli n piani contigui si riducesse ad un sol piano, si avrebbe

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \alpha_{n-3} = \ldots = \alpha_n = 0 :$$

fatte queste sostituzioni nella (31), e nella (30), si avrebbero di nuovo le (32), ma per la (4) abbiamo eziandio

$$\gamma_n = u_n ; \text{ perciò } w_1 = o .$$

Dunque se un grave salga per un piano inclinato con velocità iniziale, uguale a quella che acquistato avrebbe discendendo pel piano stesso, giungerà con moto equabilmente ritardato sino al principio di questo piano, ed ivi la sua velocità sarà nulla, non altrimenti che nel caso della salita per una curva, come già è noto.

§. XI.

Essendo n il numero dei piani contigui, ed m un intero minore di n, rappresenti AB l'$(n-m)$esimo di essi; cosicchè A sia l'estremo suo superiore, B l'inferiore. Un grave partendo dalla quiete, discenda lungo tutti questi $n-m$ piani: giunto esso all'estremo inferiore B, la sua velocità sarà espressa mediante la seconda delle (2), quando in essa pongasi $n-m$ invece di n. Inoltre salga lo stesso grave pel medesimo sistema degli n piani contigui, incominciando dall'ultimo di essi, cioè dall'$n$esimo, ed abbia per velocità iniziale primitiva quella, che acquistato avrebbe se fosse disceso naturalmente per tutto il sistema degli n piani, sino a percorrere l'ultimo s_n di essi. Giunto il grave salendo all'estremo B, avrà secondo AB una velocità iniziale, rappresentata da γ_{n-m}, che sarà espressa dalla (27); ed il rapporto

$$\frac{v_{n-m}}{\gamma_{n-m}}$$

esprimerà quello delle due velocità, una discendente l'altra ascendente, che appartengono al grave, mentre passa per lo stesso vertice B, una volta nella sua discesa, ed un'altra nella sua salita.

Questo rapporto è assai complicato nell'attuale sua generalità; ma si ridurrà molto semplice nel caso di due soli piani contigui AB, BC, essendo B il vertice dell'angolo che fanno l'uno coll'altro i piani medesimi. Per questo caso avremo $n=2$, $m=1$; quindi dalla seconda delle (2) si avrà

Digitized by Google

$$v_1 = (2gh_1)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad v_2 = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_2 + h_1\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

e dalla (27) si otterrà

$$\gamma_1 = (\gamma^2_2 - 2gh_2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1\ ;$$

ma per ipotesi abbiamo $\gamma_2 = v_2$, dunque sarà

$$\gamma_1 = (\gamma^2_2 - 2gh_2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1 = (2gh_1)^{\frac{1}{2}}\cos^2\alpha_1\ ,$$

ed il rapporto

$$\frac{v_{n-m}}{\gamma_{n-m}} = \frac{v_1}{\gamma_1} = \frac{1}{\cos^2\alpha_1} > 1, \text{ donde } v_1 > \gamma_1\ .$$

Da ciò si conclude che nel sistema di due piani, la velocità finale discendente v_1 nel vertice dell'angolo da essi formato, sta alla velocità iniziale ascendente γ_1 nel vertice stesso, come il seno totale, sta al coseno quadrato dell'angolo medesimo; purchè la velocità iniziale primitiva γ_2 del grave ascendente, uguagli la velocità finale ultima del grave discendente.

L'indicato rapporto è assai semplice nel caso di due piani, lo sarà meno nel caso di tre, e diverrà sempre più complesso crescendo il numero dei medesimi. Sieno in fatti AB, BC, CD tre piani contigui, e formino il sistema, pel quale deve tanto salire quanto scendere un grave: cerchiamo il rapporto fra la velocità finale discendente v_2, e la velocità iniziale ascendente γ_2 nel vertice B. Avremo per questo caso $n = 3$, $m = 2$, e dalla seconda delle (2) sarà

$$v_1 = (2gh_1)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad v_3 = (2g)^{\frac{1}{2}}(h_3 + h_2\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\ ;$$

cosicchè dalla (27) dedurremo

$$\gamma_1 = (\gamma^2_3\cos^2\alpha_2 - 2gh_3\cos^2\alpha_2 - 2gh_2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1\ .$$

Ma per ipotesi abbiamo $v_3 = \gamma_3$, dunque sostituendo nel valore di γ_1, ora trovato, quello di v^2_3 invece di γ^2_3, avremo

$$\gamma_1 = [2g(h_3 + h_2\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)\cos^2\alpha_2 - 2gh_3\cos^2\alpha_2 - 2gh_2]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1\ ;$$

laonde il rapporto cercato, sarà per questo caso

$$\frac{v_{n-m}}{\gamma_{n-m}} = \frac{v_1}{\gamma_1} = \frac{h^{\frac{1}{2}}_1}{[(h_2\cos^2\alpha_2 + h_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1)\cos^2\alpha_2 - h_2]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1}\ ,$$

che molto più è complesso del precedente.

Mediante la quarta delle (1), possiamo dalle formule precedenti eliminare h, similmente a quanto si è indicato pel moto ascendente (§ IV, e IV), introducendo cioè nelle formule stesse, gli angoli delle inclinazioni dei piani all'orizzonte, colle lunghezze dei medesimi. Eseguita questa eliminazione, la (27) si ridurrà nella

Digitized by Google

(33)
$$\gamma_{n-m}=w_{n-m+1}\cos\alpha_{n-m}=\left\{\begin{aligned}&[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\,\ldots\,\cos^2\alpha_{n-m+1}\\&-2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\,\ldots\,\cos^2\alpha_{n-m+1}\\&+s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\,\ldots\,\cos^2\alpha_{n-m+1}\\&+\ldots+s_{n-m+1}\operatorname{sen}\varphi_{n-m+1})]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{n-m}\,,\end{aligned}\right.$$

la quale, se fosse

$$\alpha_{n-1}=\alpha_{n-2}=\ldots=\alpha_{n-m}(=\alpha)\,,$$

diverebbe

$$\gamma_{n-m}=w_{n-m+1}\cos\alpha=[\gamma^2_n\cos^{2(m-1)}\alpha-2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^{2(m-1)}\alpha$$
$$+s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^{2(m-2)}\alpha+\ldots+s_{n-m+1}\operatorname{sen}\varphi_{n-m+1})]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\,.$$

Con queste medesime sostituzioni avremo dalla (28) le

(34)
$$\gamma_1=w_1\cos\alpha_2=\left\{\begin{aligned}&[(\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos\alpha^2_{n-2}\,\ldots\,\cos^2\alpha_2\\&-2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\,\ldots\,\cos^2\alpha_2\\&+s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\,\ldots\,\cos^2\alpha_2\\&+\ldots+s_2\operatorname{sen}\varphi_2)]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1\,,\end{aligned}\right.$$

$$\gamma_1=w_1\cos\alpha=[\gamma^2_n\cos^{2(n-2)}\alpha-2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^{2(n-2)}\alpha$$
$$+s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^{2(n-3)}\alpha+\ldots+s_2\operatorname{sen}\varphi_2)]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\,.$$

Dalla (29) le

(35)
$$w_{n-m}=(\gamma^2_{n-m}-2gs_{n-m}\operatorname{sen}\varphi_{n-m})^{\frac{1}{2}}=\left\{\begin{aligned}&[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ldots\cos^2\alpha_{n-m}\\&-2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ldots\cos^2\alpha_{n-m}\\&+s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\ldots\cos^2\alpha_{n-m}\\&+\ldots+s_{n-m}\operatorname{sen}\varphi_{n-m})]^{\frac{1}{2}}\,,\end{aligned}\right.$$

$$w_{n-m}=(\gamma^2_{n-m}-2gs_{n-m}\operatorname{sen}\varphi_{n-m})^{\frac{1}{2}}=[\gamma^2_n\cos^{2m}\alpha-2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^{2m}\alpha$$
$$+s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^{2(m-1)}\alpha+\ldots+s_{n-m}\operatorname{sen}\varphi_{n-m})]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Digitized by Google

Dalla (30) la

$$
(36)\quad\left\{
\begin{aligned}
w_1 = (\gamma^2{}_1 - 2gs_1\operatorname{sen}\varphi_1)^{\frac{1}{2}} = &\left\{
\begin{aligned}
&[\gamma^2{}_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\;.\;.\;.\;\cos^2\alpha_1 \\
&- 2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\;.\;.\;.\;\cos^2\alpha_1 \\
&+ s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}\;.\;.\;\cos^2\alpha_1 \\
&+ \;.\;.\;.\; + s_1\operatorname{sen}\varphi_1)]^{\frac{1}{2}}\;,
\end{aligned}\right. \\
w_1 = (\gamma^2{}_1 - 2gs_1\operatorname{sen}\varphi_1)^{\frac{1}{2}} = &\,[\gamma^2{}_n\cos^{2(n-1)}\alpha - 2g(s_n\operatorname{sen}\varphi_n\cos^{2(n-1)}\alpha \\
&+ s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^{2(n-2)}\alpha + \;.\;.\;.\; + s_1\operatorname{sen}\varphi_1)]^{\frac{1}{2}}\;.
\end{aligned}\right.
$$

Dalla (31) le

$$
(37)\quad\left\{
\begin{aligned}
\gamma_n = (2g)^{\frac{1}{2}}\Bigg(&s_n\operatorname{sen}\varphi_n + \frac{s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}}{\cos^2\alpha_{n-1}} + \frac{s_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}}{\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}} \\
&+ \frac{s_{n-3}\operatorname{sen}\varphi_{n-3}}{\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3}} + \ldots + \frac{s_1\operatorname{sen}\varphi_1}{\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ldots\cos^2\alpha_1}\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \\
\gamma_n = (2g)^{\frac{1}{2}}\Bigg(&s_n\operatorname{sen}\varphi_n + \frac{s_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}}{\cos^2\alpha} + \frac{s_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}}{\cos^4\alpha} \\
&+ \frac{s_{n-3}\operatorname{sen}\varphi_{n-3}}{\cos^6\alpha} + \;.\;.\;.\; + \frac{s_1\operatorname{sen}\varphi}{\cos^{2(n-1)}\alpha}\Bigg)^{\frac{1}{2}}\;.
\end{aligned}\right.
$$

Dalla seconda di tutte queste formule, incominciando colle (33) e terminando colle (37), potremo eliminare l'angolo α, sostituendovi l'angolo $\frac{1}{n-1}(\varphi_1-\varphi_n)$ per mezzo della relazione (25), applicabile alle formule medesime.

Essendo

$$\gamma_n, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_2, \gamma_1$$

le velocità iniziali, ossia quelle velocità, che il grave possiede al principio della sua salita, per ognuno dei rispettivi piani, dovranno le perdite di velocità che il medesimo incontra nel cominciare queste salite, cioè nel passare da uno all'altro contiguo piano, essere denotate rispettivamente dalle

$$w_n - \gamma_{n-1}, \; w_{n-1} - \gamma_{n-2}, \; w_{n-2} - \gamma_{n-3}, \ldots, w_2 - \gamma_1 .$$

Ma dalle precedenti formule (§. IX), specialmente dalla (29), abbiamo

$$w_n - \gamma_{n-1} = w_n(1 - \cos\alpha_{n-1}) = (1 - \cos\alpha_{n-1})(\gamma^2_n - 2gh_n)^{\frac{1}{2}},$$

$$w_{n-1} - \gamma_{n-2} = w_{n-1}(1 - \cos\alpha_{n-2}) = (1 - \cos\alpha_{n-2})[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1} - 2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1} + h_{n-1})]^{\frac{1}{2}},$$

$$w_{n-2} - \gamma_{n-3} = w_{n-2}(1 - \cos\alpha_{n-3}) = (1 - \cos\alpha_{n-3})[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}$$
$$- 2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} + h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} + h_{n-2})]^{\frac{1}{2}},$$

. . . .

$$w_2 - \gamma_1 = w_2(1 - \cos\alpha_1) = (1 - \cos\alpha_1)[\gamma^2_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} \ldots \cos^2\alpha_2$$
$$- 2g(h_n\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2} \ldots \cos^2\alpha_2 + h_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_{n-3} \ldots \cos^2\alpha_2$$
$$+ \ldots + h_2)]^{\frac{1}{2}},$$

formule che, quando in esse facciasi $\gamma_n = o$, $g = -g$, riduconsi pel significato alle (8), §. V; e chiamando Σ la somma delle velocità perdute dal grave nel passare da un piano all'altro, avremo

$$(38) \quad \Sigma = w_n(1 - \cos\alpha_{n-1}) + w_{n-1}(1 - \cos\alpha_{n-2}) + \ldots + w_2(1 - \cos\alpha_1) .$$

Per tanto se le velocità w_n, w_{n-1}, . . . , w_2 si prendano come raggi, e nei diversi corrispondenti circoli si misurino gli angoli

$$\alpha_{n-1}, \; \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_2, \; \alpha_1,$$

apparisce che la somma delle velocità perdute dal grave, passando esso da un piano al prossimo seguente, mentre sale con moto uniformemente ritardato lungo un sistema di n piani contigui, uguaglia la somma dei seni versi corrispondenti agli angoli che fanno insieme i piani medesimi, presi questi angoli nei circoli, aventi rispettivamente come raggi le velocità, che il grave possiede alla fine di

Digitized by Google

ciascun piano, dal primo s_n, sino al penultimo s_2. Dopo ciò è chiaro che sarà

$$\Sigma = 0,$$

tanto nel caso di un sol piano, quanto in quello di una curva, conforme a quanto fu concluso dalle (8) del §. V.

Nel caso di

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_2 = \alpha_1 (= \alpha),$$

sarà

$$\Sigma = (1 - \cos\alpha)\ (w_n + w_{n-1} + \ldots + w_2).$$

§. XII.

Esprimiamo con

$$t_n,\quad t_{n-1},\quad t_{n-2},\quad \ldots,\quad t_2,\quad t_1,$$

i tempi, che impiega il grave a salire per le rispettive lunghezze

$$s_n,\quad s_{n-1},\quad s_{n-2},\quad \ldots,\quad s_2,\quad s_1,$$

degli n piani diversamente inclinati e contigui, a cominciare dalla prima inferiore s_n, e terminare coll'ultima superiore s_1.

Dalla seconda delle (26), avuto riguardo alle velocità iniziali, corrispondenti al principio di ogni nuova salita, dovremo avere le

$$t_n = \frac{\gamma_n - w_n}{g \operatorname{sen}\varphi_n},\quad t_{n-1} = \frac{\gamma_{n-1} - w_{n-1}}{g \operatorname{sen}\varphi_{n-1}},\quad t_{n-2} = \frac{\gamma_{n-2} - w_{n-2}}{g \operatorname{sen}\varphi_{n-2}}, \ldots, t_1 = \frac{\gamma_1 - w_1}{g \operatorname{sen}\varphi_1},$$

formule che si riducono al significato delle altre simili, date in principio del §. VI, quando in esse pongasi $-g$ in vece di g, ed anche $\gamma_n = 0$. Ora si faccia

$$t = t_n + t_{n-1} + \ldots + t_2 + t_1,$$

ed avremo il tempo totale t, speso dal grave a salire per tutti gli n piani, rappresentato dalla

$$(39)\quad t = \frac{1}{g}\left(\frac{\gamma_n}{\operatorname{sen}\varphi_n} + \frac{\gamma_{n-1}}{\operatorname{sen}\varphi_{n-1}} + \ldots + \frac{\gamma_1}{\operatorname{sen}\varphi_1} - \frac{w_n}{\operatorname{sen}\varphi_n} - \frac{w_{n-1}}{\operatorname{sen}\varphi_{n-1}} - \ldots - \frac{w_1}{\operatorname{sen}\varphi_1}\right).$$

Se ciascun piano fosse ugualmente inclinato all'orizzonte, dovrebbe aversi

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_n = \varphi_{n-1} = \ldots = \varphi_1 (= \varphi), \\ \gamma_{n-1} = w_n,\quad \gamma_{n-2} = w_{n-1},\quad \ldots,\quad \gamma_1 = w_2, \end{array}\right.$$

quindi la (39) si ridurrà nella

$$t = \frac{\gamma_n - w_1}{g\text{sen}\varphi} = \frac{\gamma - w}{g\text{sen}\varphi},$$

formula già cognita per un solo piano inclinato.

Eliminando i seni dalla (39), mediante la quarta delle (1), avremo

$$(41)\quad t = \frac{1}{g}\left(\frac{\gamma_n s_n}{h_n} + \frac{\gamma_{n-1}s_{n-1}}{h_{n-1}} + \ldots + \frac{\gamma_1 s_1}{h_1} - \frac{w_n s_n}{h_n} - \frac{w_{n-1}s_{n-1}}{h_{n-1}} - \ldots - \frac{w_1 s_1}{h_1}\right),$$

essendo

$$h_n\,,\; h_{n-1}\,,\; h_{n-2}\,,\; \ldots\,,\; h_2\,,\; h_1\,,$$

le altezze dei diversi piani, a cominciare dall' inferiore s_n, e terminare col superiore s_1. Se nella (41) pongasi

$$\frac{s_n}{h_n} = \frac{s_{n-1}}{h_{n-1}} = \ldots = \frac{s_2}{h_2} = \frac{s_1}{h_1}\left(= \frac{s}{h}\right),$$

dovranno per essa valere anche le (40); quindi avremo la

$$t = \frac{s}{gh}(\gamma_n - w_1) = \frac{s}{gh}(\gamma - w),$$

che si riferisce ad un solo piano inclinato, come già conosciamo, per la seconda delle (26) combinata colla quarta delle (1).

Dalla seconda (26) abbiamo eziandio le

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
w_n &= \gamma_n - gt_n\text{sen}\varphi_n\,,\\
w_{n-1} &= \gamma_{n-1} - gt_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1} = w_n\cos\alpha_{n-1} - gt_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1} =\\
&\quad \gamma_n\cos\alpha_{n-1} - gt_n\text{sen}\varphi_n\cos\alpha_{n-1} - gt_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1}\,,\\
w_{n-2} &= \gamma_{n-2} - gt_{n-2}\text{sen}\varphi_{n-2} = w_{n-1}\cos\alpha_{n-2} - gt_{n-2}\text{sen}\varphi_{n-2} =\\
&\quad \gamma_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2} - gt_n\text{sen}\varphi_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\\
&\quad - gt_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha_{n-2} - gt_{n-2}\text{sen}\varphi_{n-2}\,,\\
w_{n-3} &= \gamma_{n-3} - gt_{n-3}\text{sen}\varphi_{n-3} = w_{n-2}\cos\alpha_{n-3} - gt_{n-3}\text{sen}\varphi_{n-3} =\\
&\quad \gamma_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3} - gt_n\text{sen}\varphi_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\\
&\quad - gt_{n-1}\text{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3} - gt_{n-2}\text{sen}\varphi_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\\
&\quad - gt_{n-3}\text{sen}\varphi_{n-3}\,.
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

quindi, per l'ultima velocità finale, generalmente avremo

$$(43)\quad w_1=\gamma_1-gt_1\mathrm{sen}\varphi_1=\left\{\begin{array}{l}\gamma_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_1\\ -\,g(t_n\mathrm{sen}\varphi_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_1\\ +\,t_{n-1}\mathrm{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_1\\ +\,t_{n-2}\mathrm{sen}\varphi_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\cos\alpha_{n-4}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_1\\ +\ .\ .\ .\ +\,t_2\mathrm{sen}\varphi_2\cos\alpha_1+t_1\mathrm{sen}\varphi_1)\ ,\end{array}\right.$$

formula composta di $n+1$ termini, la quale, per $\gamma_n=o$, $g=-g$, avrà il significato stesso della (12).

Se la velocità iniziale primitiva del grave fosse quella, volta in contrario, che il medesimo acquisterebbe, scendendo per tutta la serie degli n piani diversamente inclinati, si dovrebbe invece di γ_n sostituire nella (43) il valore di v_n della (12), distinguendo con un apice superiore i diversi t della medesima: per tale sostituzione si avrebbe

$$w_1=\left\{\begin{array}{l}g[(t'_1\mathrm{sen}\varphi_1\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_1\\ +\,t'_2\mathrm{sen}\varphi_2\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_2\cos\alpha_1\\ +\,t'_3\mathrm{sen}\varphi_3\cos^2\alpha_{n-1}\cos^2\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos^2\alpha_3\cos\alpha_2\cos\alpha_1\\ +\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ +\,t'_{n-1}\mathrm{sen}\varphi_{n-1}\cos^2\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_2\cos\alpha_1\\ +\,t'_n\mathrm{sen}\varphi_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_2\cos\alpha_1)\\ -(t_n\mathrm{sen}\varphi_n\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_2\cos\alpha_1\\ +\,t_{n-1}\mathrm{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_2\cos\alpha_1\\ +\,t_{n-2}\mathrm{sen}\varphi_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\cos\alpha_{n-4}\ .\ .\ .\ \cos\alpha_2\cos\alpha_1\\ +\ .\ .\ .\ .\ +\,t_2\mathrm{sen}\varphi_2\cos\alpha_1+t_1\mathrm{sen}\varphi_1)]\ .\end{array}\right.$$

In questa espressione, la somma dei termini negativi deve superare quella dei positivi; giacchè la supposta velocità iniziale primitiva, non può essere sufficiente a far salire il grave per tutta la serie degli n piani diversamente inclinati: conseguenza che fu dedotta sul principio del §. X.

Digitized by Google

Se vogliasi determinare la velocità iniziale primitiva γ_n in guisa, che la velocità w_1 del grave divenga zero alla fine della salita per l' ultimo piano inclinato s_1, dovremo annullare il secondo membro della (43), ed avremo

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_n = g\Big(& t_n \operatorname{sen}\varphi_n + \frac{t_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}}{\cos\alpha_{n-1}} + \frac{t_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}}{\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}} + \ldots \\ & \ldots + \frac{t_2\operatorname{sen}\varphi_2}{\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ldots\cos\alpha_2} + \frac{t_1\operatorname{sen}\varphi_1}{\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\ldots\cos\alpha_1}\Big). \end{aligned} \right.$$

Paragonando questa formula colla (12), nella quale i diversi t si debbono in questo caso distinguere con un apice superiore, avremo di nuovo

$$\gamma_n > v_n ,$$

per quanto abbiamo già dedotto dalla (31). Allora dunque il grave percorrerà salendo tutto il sistema degli n piani diversamente inclinati, quando la sua velocità iniziale primitiva γ_n sia maggiore di quella, che il medesimo acquisterebbe, scendendo per tutta la serie dei piani medesimi ; ed inoltre allora nell' estremo superiore dell' ultimo s_1 di questi piani, avrà esso estinta la sua velocità, quando il valore di γ_n sia quello dato dalla (44), o meglio dalla (31), che più assai dell'altra può servire allo scopo.

Se i piani saranno fra loro egualmente inclinati, avremo

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_1 (= \alpha),$$

perciò in tale ipotesi la (31) si ridurrà nella

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} & \gamma_n = (2g)^{\frac{1}{2}}\Big(h_n + \frac{h_{n-1}}{\cos^2\alpha} + \frac{h_{n-2}}{\cos^4\alpha} + \frac{h_{n-3}}{\cos^6\alpha} + \ldots + \frac{h_1}{\cos^{2(n-1)}\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}}, \\ & \qquad \text{la (43) nella} \\ & w_1 = \gamma_n \cos^{n-1}\alpha - g(t_n \operatorname{sen}\varphi_n \cos^{n-1}\alpha + t_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\cos^{n-2}\alpha \\ & \qquad + t_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}\cos^{n-3}\alpha + \ldots t_2\operatorname{sen}\varphi_2\cos\alpha + t_1\operatorname{sen}\varphi_1), \\ & \qquad \text{e la (44) nella} \\ & \gamma_n = g\Big(t_n\operatorname{sen}\varphi_n + \frac{t_{n-1}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}}{\cos\alpha} + \frac{t_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-2}}{\cos^2\alpha} + \ldots + \frac{t_2\operatorname{sen}\varphi_2}{\cos^{n-2}\alpha} + \\ & \qquad\qquad + \frac{t_1\operatorname{sen}\varphi_1}{\cos^{n-1}\alpha}\Big). \end{aligned} \right.$$

Inoltre se la inclinazione dei piani fra loro sia nulla, cioè se il sistema degli n piani costituisca un piano solo, avremo.

Digitized by Google

$$\alpha = o \ , \quad \text{e} \quad \varphi_n = \varphi_{n-1} = \varphi_{n-2} = \ . \ . \quad = \varphi_1 (= \varphi) \ ;$$

perciò le (45) si ridurranno alle

$$\gamma = (2gH)^{\frac{1}{2}}, \quad w = \gamma - gt\text{sen}\varphi \ , \quad \gamma = gt\text{sen}\varphi \ ,$$

nelle quali formule abbiamo soppresso gli apici, e inoltre abbiamo posto

$$h_n + h_{n-1} + \ . \ . \ . + h_1 = \text{H} \ , \qquad t_n + t_{n-1} + \ . \ . \ . \ + t_2 + t_1 = t \ .$$

La seconda delle formule ora dedotte coincide colla seconda delle (26), le altre colla prima e seconda delle (1), fatto in queste $c = o$, come richiede la ipotesi attuale.

Nella seconda delle (45) facendo $w_1 = o$, e risolvendo rispetto $\cos\alpha$ l'equazione così ottenuta, vedremo per quale valore di α la velocità del grave si annullerà nell'estremo superiore dell'ultimo piano s_1, essendo cognite tutte le altre quantità contenute nell'equazione medesima. Posto a modo di esempio $n = 3$, avremo

$$\cos^2\alpha - \frac{gt_2\text{sen}\varphi_2}{\gamma_3 - gt_3\text{sen}\varphi_3}\cos\alpha - \frac{gt_1\text{sen}\varphi_1}{\gamma_3 - gt_3\text{sen}\varphi_3} = o \ ,$$

donde

$$\cos\alpha = \frac{gt_2\text{sen}\varphi_2 + \sqrt{[g^2t^2_2\text{sen}^2\varphi_2 + 4gt_1(\gamma_3 - gt_3\text{sen}\varphi_3)\text{sen}\varphi_1]}}{2(\gamma_3 - gt_3\text{sen}\varphi_3)} \ ,$$

ove abbiamo conservato solamente il segno $+$ innanzi al radicale, perchè dev'essere sempre $\alpha < 90°$, e $\gamma_3 - gt_3\text{sen}\varphi_3 > o$.

Riferendoci ad un sol piano inclinato, se vogliamo conoscere quale sia la durata t' del moto ascendente lungo il piano medesimo, dovremo eguagliare a zero la seconda delle (26), dalla quale perciò avremo

$$t' = \frac{\gamma}{g\text{sen}\varphi} \ ;$$

e se vorrà conoscersi lo spazio s' percorso dal grave in questo medesimo tempo, dovremo porre il trovato valore di t' nella terza delle stesse (26), per la qual cosa otterremo

$$s' = \frac{\gamma^2}{2g\text{sen}\varphi} \ .$$

Ma il tempo e lo spazio qui assegnati sono quegli stessi, pei quali un grave, dalla quiete scendendo lungo un piano inclinato ad angolo φ coll'orizzonte, con moto equabilmente accelerato, acquisterebbe la velocità γ. Perciò concludiamo che se, dopo estinta la velocità iniziale nella salita lungo un sol piano inclinato, il grave continui ad obbedire alla forza sollecitante g, dovrà esso scendere pel medesimo piano, e nello stesso tempo t' tornerà dove incominciò

Digitized by Google

a salire, avendo ivi acquistata la medesima velocità iniziale γ, non altramente di quanto avviene pel moto *verticale* uniformemente ritardato.

Dalla seconda delle (26) abbiamo il tempo qualunque t della salita, espresso da

$$t = \frac{\gamma - w}{g\text{sen}\varphi};$$

ma essendo t' il tempo totale sino alla cessazione del moto, avremo

$$w = (t' - t)g\text{sen}\varphi\ .$$

Inoltre dalla prima delle (26) abbiamo lo spazio qualunque

$$s = \frac{\gamma^2 - w^2}{2g\text{sen}\varphi};$$

ma essendo s' lo spazio totale sino alla cessazione del moto, sarà

$$s' - s = \frac{w^2}{2g\text{sen}\varphi} = \frac{(t' - t)^2 g\text{sen}\varphi}{2}\ .$$

Da tutto ciò si conclude che, nel moto equabilmente ritardato lungo un sol piano, la velocità w corrispondente a qualunque tempo t, è proporzionale al tempo $t' - t$ che resta sino alla cessazione del moto stesso; e lo spazio residuo $s' - s$, da percorrere sino al cessare di questo moto, è proporzionale al quadrato tanto della stessa velocità, quanto del tempo medesimo, come appunto si verifica nel moto *verticale* uniformemente ritardato.

§. XIII.

Dalla terza delle (26) abbiamo

$$s_n = \gamma_n t_n - \frac{g t^2_n \text{sen}\varphi_n}{2}\ ,$$

$$s_{n-1} = \gamma_{n-1} t_{n-1} - \frac{g t^2_{n-1} \text{sen}\varphi_{n-1}}{2}\ ,$$

$$s_{n-2} = \gamma_{n-2} t_{n-2} - \frac{g t^2_{n-2} \text{sen}\varphi_{n-2}}{2}\ ,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$s_2 = \gamma_2 t_2 - \frac{g t^2_2 \text{sen}\varphi_2}{2}\ , \qquad s_1 = \gamma_1 t_1 - \frac{g t^2_1 \text{sen}\varphi_1}{2}\ ,$$

Digitized by Google

e ponendo

$$s = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + \ldots + s_2 + s_1 ,$$

avremo

(46) $s = \frac{1}{2}(2\gamma_n t_n + 2\gamma_{n-1} t_{n-1} + \ldots + 2\gamma_1 t_1) - \frac{1}{2} g (t^2_n \operatorname{sen}\varphi_n + t^2_{n-1} \operatorname{sen}\varphi_{n-1} + \ldots + t^2_1 \operatorname{sen}\varphi_1),$

formula che si converte nella (14) pel cangiamento di g in $-g$, però avuto riguardo alla velocità iniziale primitiva, che in essa (14) è supposta nulla. Dalla (46) per mezzo della (27) potremo eliminare le

$$\gamma_{n-1}, \quad \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_2, \gamma_1 .$$

Se il sistema degli n piani contigui diverrà un sol piano, torneremo ad avere le (40); perciò la (46) si ridurrà nella

(47) $s = \frac{1}{2}(2\gamma_n t_n + 2\gamma_{n-1} t_{n-1} + \ldots + 2\gamma_1 t_1) - \frac{g \operatorname{sen}\varphi}{2}(t^2_n + t^2_{n-1} + \ldots + t^2_2 + t^2_1);$

ma in questo caso, combinando le (40) colle (42), avremo le

$$\begin{aligned}
\gamma_{n-1} &= w_n &&= \gamma_n - t_n g \operatorname{sen}\varphi , \\
\gamma_{n-2} &= w_{n-1} &&= \gamma_n - (t_n + t_{n-1}) g \operatorname{sen}\varphi , \\
\gamma_{n-3} &= w_{n-2} &&= \gamma_n - (t_n + t_{n-1} + t_{n-2}) g \operatorname{sen}\varphi , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_1 &= w_2 &&= \gamma_n - (t_n + t_{n-1} + \ldots + t_3 + t_2) g \operatorname{sen}\varphi ;
\end{aligned}$$

ed eziandio le

$$\begin{aligned}
2\gamma_{n-1} t_{n-1} &= 2\gamma_n t_{n-1} - 2 t_n t_{n-1} g \operatorname{sen}\varphi , \\
2\gamma_{n-2} t_{n-2} &= 2\gamma_n t_{n-2} - 2(t_n t_{n-2} + t_{n-1} t_{n-2}) g \operatorname{sen}\varphi , \\
2\gamma_{n-3} t_{n-3} &= 2\gamma_n t_{n-3} - 2(t_n t_{n-3} + t_{n-1} t_{n-3} + t_{n-2} t_{n-3}) g \operatorname{sen}\varphi , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2\gamma_1 t_1 &= 2\gamma_n t_1 - 2(t_n t_1 + t_{n-1} t_1 + \ldots + t_3 t_1 + t_2 t_1) g \operatorname{sen}\varphi .
\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella (47), avremo pel caso di un sol piano

$$\begin{aligned}
s = {} & \gamma_n (t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots + t_2 + t_1) \\
& - (2t_n t_{n-1} + 2t_n t_{n-2} + \ldots + 2t_n t_{n-3} + \ldots + 2t_n t_1 + \ldots + 2t_2 t_1) \frac{g \operatorname{sen}\varphi}{2} \\
& - (t^2_n + t^2_{n-1} + t^2_{n-2} + \ldots + t^2_2 + t^2_1) \frac{g \operatorname{sen}\varphi}{2} = \\
= {} & \gamma_n (t_n + t_{n-1} + \ldots + t_2 + t_1) - (t_n + t_{n-1} + \ldots + t_2 + t_1)^2 \frac{g \operatorname{sen}\varphi}{2} ;
\end{aligned}$$

Digitized by Google

quindi fatto

$$t_n + t_{n-1} + \ldots + t_2 + t_1 = t \quad ,$$

e cangiando γ in γ_n, sarà

$$s = \gamma t - \frac{t^2 g \operatorname{sen}\varphi}{2} \,,$$

che appunto è l'ultima formula (26), già cognita pel caso di un sol piano.

Se poi dalla (46) si volesse il valore di s nel caso di

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_1 (= \alpha) \,,$$

farebbe d'uopo sostituire nella medesima i valori che sieguono, tratti dalla (27):

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma_{n-1} = (\gamma^2{}_n - 2gh_n)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha \,, \\ &\gamma_{n-2} = [\gamma^2{}_n \cos^2\alpha - 2g(h_n \cos^2\alpha + h_{n-1})]^{\frac{1}{2}} \cos\alpha \,, \\ &\gamma_{n-3} = [\gamma^2{}_n \cos^4\alpha - 2g(h_n \cos^4\alpha + h_{n-1} \cos^2\alpha + h_{n-2})]^{\frac{1}{2}} \cos\alpha \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\gamma_1 = [\gamma^2{}_n \cos^{2(n-2)}\alpha - 2g(h_n \cos^{2(n-2)}\alpha + h_{n-1} \cos^{2(n-3)}\alpha \\ &\qquad\qquad + \ldots\ldots + h_2)]^{\frac{1}{2}} \cos\alpha . \end{aligned} \right.$$

Dalla (43) abbiamo

$$(49) \quad \gamma_1 = \left\{ \begin{aligned} &\gamma_n \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_{n-2} \cos\alpha_{n-3} \ldots \cos\alpha_1 \\ &- g(t_n \operatorname{sen}\varphi_n \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_{n-2} \ldots \cos\alpha_1 \\ &+ t_{n-1} \operatorname{sen}\varphi_{n-1} \cos\alpha_{n-2} \cos\alpha_{n-3} \ldots \cos\alpha_1 \\ &+ t_{n-2} \operatorname{sen}\varphi_{n-2} \cos\alpha_{n-3} \cos\alpha_{n-4} \ldots \cos\alpha_1 \\ &+ \ldots + t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\alpha_1) \,, \end{aligned} \right.$$

e pel caso particolare di

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \alpha_{n-3} = \ldots = \alpha_1 (= \alpha) \quad ,$$

sarà

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma_1 = \gamma_n \cos^{n-1}\alpha - g(t_n \operatorname{sen}\varphi_n \cos^{n-1}\alpha + t_{n-1} \operatorname{sen}\varphi_{n-1} \cos^{n-2}\alpha \\ &\qquad + t_{n-2} \operatorname{sen}\varphi_{n-2} \cos^{n-3}\alpha + \ldots + t_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\alpha) \,. \end{aligned} \right.$$

Se gli n piani del sistema riducansi ad uno, sarà

$$\gamma_1 (= w_2) = \gamma_n - g(t_n + t_{n-1} + \ldots + t_2)\mathrm{sen}\varphi\,;$$

quindi fatto

$$t_n + t_{n-1} + \ldots + t_2 = t',$$

avremo

$$\gamma_1 (= w_2) = \gamma_n - gt'\mathrm{sen}\varphi\ ,$$

formula già cognita, e simile alla seconda delle (26).

Sostituendo nella (50), in luogo di 1, successivamente

$$n-1\,,\quad n-2\,,\quad n-3\,,\ \ldots\,,\ 3\,,\ 2\,,$$

negli esponenti di $\cos\alpha$, otterremo

$$(51)\quad\left\{\begin{array}{l}
\gamma_{n-1} = (\gamma_n - gt_n\mathrm{sen}\varphi_n)\cos\alpha\,,\\[1ex]
\gamma_{n-2} = [\gamma_n\cos\alpha - g(t_n\mathrm{sen}\varphi_n\cos\alpha + t_{n-1}\mathrm{sen}\varphi_{n-1})]\cos\alpha\,,\\[1ex]
\gamma_{n-3} = [\gamma_n\cos^2\alpha - g(t_n\mathrm{sen}\varphi_n\cos^2\alpha + t_{n-1}\mathrm{sen}\varphi_{n-1}\cos\alpha + t_{n-2}\mathrm{sen}\varphi_{n-2})]\cos\alpha;\\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

l'ultima di queste formule, che si deducono anche più speditamente dalle (42), coincide colla (50) stessa, e perciò non l'abbiamo qui riprodotta. Eliminando le

$$\gamma_{n-1}\ ,\quad \gamma_{n-2}\ ,\quad \ldots\ ,\ \gamma_2\ ,\quad \gamma_1$$

dalla (46) mediante le (51), otterremo il valore di s pel caso di

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_1\ (= \alpha)\,,$$

più semplicemente di quello sia valendosi delle (48), che sono espressioni radicali.

§. XIV.

Chiamando H l'altezza verticale ascesa da un grave, la terza delle formule poste in principio del §. IX diviene

$$\mathrm{H} = \gamma t - \frac{gt^2}{2}\ ,$$

quindi fatto

$$t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots\ t_2 + t_1 = t\,,$$

avremo l'altezza medesima; e conoscendosi per mezzo della (46) lo spazio s percorso dal grave nel salire lungo il sistema degli n piani contigui nel tempo stesso t, potremo determinare la contemporanea località dei due

Digitized by Google

gravi, uno sulla verticale H, l'altro sulla lunghezza spezzata degli n piani inclinati. Però coll' attuale generalità, quando non si conoscano i tempi t_1, $t_2, \ldots, t_n$, questo problema riesce indeterminato; e potrà ricevere tante soluzioni, quanti sono gli spezzamenti del tempo t negli n tempi, relativi agli n piani inclinati e contigui: queste soluzioni potranno diminuirsi di numero, apponendo qualche condizione allo spezzamento di t. Ma limitiamoci ad un sol piano, e consideriamo due corpi, ognuno dei quali sale per un piano diverso, proponendoci la soluzione generale del seguente problema, che sebbene appartenente al moto rettilineo dei gravi per un sol piano, tuttavia non suole trovarsi risoluto nei corsi di meccanica. « Trovare come dipendono fra loro gli spazi s, s', percorsi ad un tempo da due gravi, che salgono rispettivamente per le lunghezze di due diversi piani, inclinati cogli angoli φ, φ' all'orizzonte, supponendo essere c, c' le rispettive iniziali velocità, impresse ai gravi medesimi al principio del moto ». Le formule per la soluzione di questo problema, quando s, e t si annullano insieme sono

$$s = ct - \frac{gt^2 \text{sen}\varphi}{2}, \quad s' = c't - \frac{gt^2 \text{sen}\varphi'}{2},$$

dalle quali eliminando il t avremo

$$(52) \quad s^2 + \left(\frac{2c'^2 \text{sen}\varphi}{g\text{sen}^2\varphi'} - \frac{2s'\text{sen}\varphi}{\text{sen}\varphi'} - \frac{2cc'}{g\text{sen}\varphi'}\right)s + \frac{s'^2\text{sen}^2\varphi}{\text{sen}^2\varphi'} + \frac{2c^2 s'}{g\text{sen}\varphi'} - \frac{2cc's'\text{sen}\varphi}{g\text{sen}^2\varphi'} = o,$$

equazione che coincide colla (20), quando in una delle due la g sia cangiata in $-g$, e che stabilisce la più generale possibile relazione fra gli spazi rettilinei s, s', percorsi ad un tempo dai gravi ascendenti.

Riunendo le (20) e (52) avremo la

$$(53) \quad s^2 + \left(\mp\frac{2c'^2 \text{sen}\varphi}{g\text{sen}^2\varphi'} - \frac{2s'\text{sen}\varphi}{\text{sen}\varphi'} \pm \frac{2cc'}{g\text{sen}\varphi'}\right)s + \frac{s'^2\text{sen}^2\varphi}{\text{sen}^2\varphi'} \mp \frac{2c^2 s'}{g\text{sen}\varphi'} \pm \frac{2cc's'\text{sen}\varphi}{g\text{sen}^2\varphi'} = o,$$

nella quale valerà il segno superiore per la discesa, e l' inferiore per la salita dei due gravi lungo i rispettivi piani inclinati.

Dalla (52) posto: 1° $c = c'$, si avrà la (21) coi segni cangiati nei termini divisi per g: 2° $c = c'$, $\varphi = \varphi'$, si avrà la (22): 3° $c = c' = o$, si avrà la (23); cioè in questo ultimo caso i due gravi discenderanno, con moto uniformemente accelerato per la mancanza delle velocità iniziali, necessarie sempre al moto equabilmente ritardato.

La (53) può mettersi anche sotto questa forma

Digitized by Google

$$As^2 + Bss' + Cs'^2 + Ds + Es' = o \ ,$$

essendo

$$A = g\text{sen}^2\varphi' \ ,$$
$$B = -2g\text{sen}\varphi \, \text{sen}\varphi' \ ,$$
$$C = g\text{sen}^2\varphi \ ,$$
$$D = \mp 2c'^2\text{sen}\varphi \pm 2cc'\text{sen}\varphi' ,$$
$$E = \mp 2c^2\text{sen}\varphi' \pm 2cc'\text{sen}\varphi \ ;$$

e poichè abbiamo

$$B^2 - 4AC = 4g^2\text{sen}^2\varphi\text{sen}^2\varphi' - 4g^2\text{sen}^2\varphi \, \text{sen}^2\varphi' = o \ ,$$

perciò la stessa (53) rappresenterà una parabola. Dunque se le totali rette percorse con moto uniformemente vario, da due gravi lungo due piani fra loro inclinati comunque, si prendano per assi delle coordinate, le lunghezze ad un tempo traversate dai gravi medesimi, che suppongonsi ambedue partire insieme dalla intersecazione degli assi, corrisponderanno alle coordinate di una parabola, che ha per equazione la (53), e che passa per la intersecazione medesima, ossia per la origine delle coordinate, cui questa curva è riferita. Tracciata pertanto una cosiffatta parabola, le coordinate de'suoi punti determineranno gli spazi percorsi ad un tempo dai gravi sui rispettivi piani.

Se facciasi

$$\varphi = \varphi' \ , \quad c = c' \quad ,$$

la (53) diverrà

$$s = s' \ ,$$

cioè la parabola si cangerà in una retta, la quale dividerà per mezzo l'angolo che i piani formano l'uno coll'altro.

Se quando principia il tempo t, comune al moto di ambo i gravi lungo i rispettivi loro piani, uno avesse già percorso la lunghezza l, trovandosi l' altro all' origine del moto stesso, allora, com' è chiaro, l' equazioni da cui eliminando t si otterrebbe la curva per determinare le lunghezze percorse ad un tempo dai gravi, dovrebbero essere

$$s = l + ct \pm \frac{gt^2\text{sen}\varphi}{2} \ , \quad s' = c't \pm \frac{gt^2\text{sen}\varphi'}{2} \ ,$$

Digitized by Google

essendo l lo spazio già percorso da uno di essi, quando l'altro si mette in moto.

Se inoltre, al cominciare del tempo t, comune al moto dei due gravi, avessero questi già percorso rispettivamente le rette l, l', ed è il caso più generale; allora sarebbero

$$s = l + ct \pm \frac{gt^2 \operatorname{sen}\varphi}{2}, \qquad s' = l' + c't \pm \frac{gt^2 \operatorname{sen}\varphi'}{2}$$

l'equazioni, dalle quali eliminando t, si avrebbe la curva, per determinare la contemporanea località dei gravi medesimi sui rispettivi piani. È facile poi vedere che anche in questi ultimi due casi, la indicata curva sarà pure una parabola; però essa generalmente non passerà per la origine delle coordinate. Tutto ciò si deduce dalla formula fondamentale del moto uniformemente vario

$$2adt = d\frac{ds}{dt},$$

esprimendo con a, b, c tre costanti; poichè per una prima integrazione avremo la

$$2at + b = \frac{ds}{dt},$$

e per una seconda la

$$at^2 + bt + c = s;$$

perciò saranno

$$(54) \qquad s = at^2 + bt + c, \quad s' = a't^2 + b't + c'$$

l'equazioni per qualunque moto uniformemente vario, dalle quali eliminando t, si otterrà la relazione richiesta fra gli spazi s, s', per determinare la contemporanea località dai gravi, che al principio del tempo comune al moto dei medesimi avranno già percorso, uno lo spazio l, l'altro lo spazio l', sulle rispettive direzioni dei loro moti, contate da una medesima origine.

Moltiplicata la prima delle (54) per b', e la seconda per b, quindi sottratta l'una dall'altra, si avrà

$$t^2 = \frac{sb' - s'b - cb' + c'b}{ab' - a'b};$$

Digitized by Google

similmente, moltiplicando la prima delle medesime per a', la seconda per a, otterremo

$$t^2 = \left(\frac{sa' - s'a - ca' + c'a}{ba' - b'a}\right)^2.$$

Eguagliando fra loro i due trovati valori di t^2, giungeremo facilmente alla

$$(55) \qquad (sa' - s'a)^2 - 2(sa' - s'a)(ca' - c'a) + (ca' - c'a)^2$$
$$- (b'a - ba')(sb' - s'b - cb' + c'b) = o.$$

Questa equazione, che stabilisce con ogni generalità la dipendenza fra le lunghezze s, s', percorse dai gravi nel moto loro uniformemente vario qualunque, rappresenta una parabola. Infatti allora una equazione appartiene a così fatta curva, quando i tre termini di essa, ognuno dei quali contiene due dimensioni delle coordinate, costituiscono un quadrato. Questo appunto si verifica nell'equazione (55), ove gl'indicati tre termini costituiscono il quadrato $(sa' - s'a)^2$; perciò l' equazione medesima rappresenta una parabola. Dunque resta generalmente dimostrato, quanto per diversi casi particolari abbiamo sopra concluso; cioè che nel moto equabilmente vario, se gli spazi percorsi da due gravi si prendano per coordinate, la curva rappresentata dalle medesime sarà una parabola, costrutta la quale, avremo come geometricamente assegnare la contemporanea località dei gravi medesimi, sulla via rettilinea percorsa da essi.

Nel caso del moto ascendente lungo due piani, dovendo finalmente il moto stesso per la forza ritardatrice annullarsi, è chiaro che gli spazi percorsi dai gravi con moto equabilmente ritardato, non potranno superare (§. XII) per uno

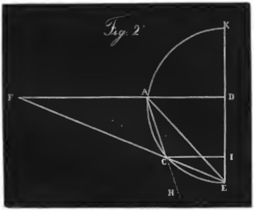
$$\frac{c^2}{2g\operatorname{sen}\varphi}, \quad \text{e per l'altro} \quad \frac{c'^2}{2g\operatorname{sen}\varphi'}.$$

Digitized by Google

APPENDICE.

Termineremo questa memoria (1) colla soluzione del seguente problema, che pure potrebbe trovar luogo nelle istituzioni di meccanica, per applicare le precedenti formule generali « In un semicircolo s' inscriva un triangolo, con un vertice nell'estremo inferiore del suo diametro verticale: sia dato il rapporto de' suoi due lati minori, e si cerchi l'angolo che questi debbono comprendere, affinchè il tempo impiegato da un grave a scendere per ambedue, torni eguale a quello che impiegherebbe scendendo pel terzo lato ».

Primieramente ognuno vede che l'angolo cercato dovrà essere maggiore di 90°, altramente il grave non potrebbe discendere pel secondo lato inferiore: da ciò dipende che il triangolo in proposito dovrà essere inscritto nel semicircolo, ed ottusangolo.



Poniamo le lunghezze dei lati espresse (fig. 2.) con

$$AE = s\,,\ AC = s_1\,,\ CE = s_2\,,$$

e le rispettive loro altezze con

$$DE = h\,,\ DI = h_1\,,\ EI = h_2\,:$$

inoltre sieno v, v_1, v_2, le corrispondenti velocità del grave, alla fine di ciascuna sua discesa, per ciascuno dei tre lati sopra espressi. Se con t venga indicato il tempo decorso nel percorrere le due lunghezze s_1, s_2, mentre τ esprime quello impiegato nello scendere per la maggiore lunghezza s, dalle (11) § VI, per $n = 2$, come richiede il caso attuale, avremo la

$$t = \frac{1}{g}\left(\frac{s_1 v_1}{h_1} + \frac{s_2 v_2}{h_2} - \frac{s_2 c_2}{h_2}\right); \tag{56}$$

inoltre dalla seconda e quarta delle (1) si avrà

Digitized by Google

$$\tau = \frac{v}{g\operatorname{sen}\varphi} = \frac{vs}{gh}\,; \tag{57}$$

essendo φ l' angolo che fa la lunghezza s coll' orizzonte. Quindi per la condizione del problema dovrà essere

$$\frac{s_1 v_1}{h_1} + \frac{s_2 v_2}{h_2} - \frac{s_2 c_2}{h_2} = \frac{vs}{h}\,. \tag{58}$$

Dalla seconda delle (2) § IV, per $n=1$ ed $n=2$, abbiamo

$$v_1 = \sqrt{(2gh_1)}\,,\quad v_2 = [2g(h_2 + h_1\cos^2\alpha_1)]^{\frac{1}{2}}\;; \tag{59}$$

e dalla prima delle (1), per $c = o$, si ha

$$v = \sqrt{(2gh)}. \tag{60}$$

Inoltre dalla prima delle (2), per $n=2$, si ottiene

$$c_2 = (2gh_1)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1\;, \tag{61}$$

essendo pel caso nostro $\alpha_1 = \mathrm{HCE}$.

Sostituiti questi valori nella (58), avremo

$$\frac{s_1}{h_1}(2gh_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{s_2}{h_2}[2g(h_2 + h_1\cos^2\alpha_1)]^{\frac{1}{2}} - \frac{s_2}{h_2}(2gh_1)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1 = \frac{s}{h}(2gh)^{\frac{1}{2}}\,,$$

e riducendo si otterrà

$$s_1 h_2 (h)^{\frac{1}{2}} - s_2 h_1 (h)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_1 = s h_2 (h_1)^{\frac{1}{2}} - s_2 (h h_1 h_2 + h h^2{}_1 \cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Innalzando al quadrato un membro e l'altro di questa equazione, riducendo, e dividendo per h_2, otterremo la

$$2ss_2(hh^2{}_1 h_2 + hh^3{}_1\cos^2\alpha_1)^{\frac{1}{2}} = s^2 h_2 h_1 + s^2{}_2 h h_1 - s^2{}_1 h_2 h + 2s_1 s_2 h h_1 \cos\alpha_1\;;$$

tornando ad innalzare al quadrato ed a ridurre, si avrà finalmente la

$$\left.\begin{aligned} & s^4{}_1 h^2{}_2 h^2 + 4s^2{}_1 s^2{}_2 h^2{}_1 h^2 \cos^2\alpha_1 + s^4 h^2{}_2 h^2{}_1 + s^4{}_2 h^2 h^2{}_1 \\ & - 4s_1{}^2 s_2 h_1 h^2 h_2 \cos\alpha_1 - 2s^2{}_1 s^2 h^2{}_2 h h_1 - 2s^2{}_1 s^2{}_2 h_2 h^2 h_1 \\ & + 4s_1 s_2 s^2 h^2{}_1 h_2 h \cos\alpha_1 + 4s_1 s^3{}_2 h^2 h^2{}_1 \cos\alpha_1 - 2s^2 s_2{}^2 h^2{}_1 h h_2 - 4s^2 s^2{}_2 h h_1{}^3 \cos^2\alpha_1 \end{aligned}\right\} = o, \tag{62}$$

equazione che dimostra qual' esser deve la dipendenza fra le lunghezze, e le

Digitized by Google

altezze dei lati del triangolo iscritto, e l'angolo α_1, onde venga soddisfatta la condizione del problema.

Dicasi k il rapporto delle due lunghezze AC, CE; rappresenti ψ l'angolo da esse compreso; e sia $2z$ l'arco EC, cosicchè abbiasi

$$\frac{AC}{CE} = \frac{s_1}{s_2} = k\,, \quad \text{ang. ACE} = \psi\,, \quad \text{arco EC} = 2z \quad ;$$

dovremo ridurre tutte l'equazioni precedenti a contenere soltanto ψ, e k. Essendo

$$\frac{360^\circ - \text{arcoECA}}{2} = \psi,$$

avremo

$$\text{arcoECA} = 360^\circ - 2\psi\,,$$

e questo sarà l' arco sotteso dal maggior lato AE($=s$) del triangolo iscritto nel semicerchio. Sommando i tre angoli del triangolo AEC, si avrà

$$\text{AEC} + \psi + z = 180^\circ\,, \quad \text{donde} \quad \text{senAEC} = \text{sen}(\psi + z)\,.$$

La somma dei tre angoli

$$\text{AEC} = 180^\circ - \psi - z\,, \quad \text{EFA} = z\,, \quad \text{EAF} = \text{EAF}\,,$$

appartenenti al triangolo AEF, dovendo eguagliare due retti, avremo

$$180^\circ - \psi - z + z + \text{EAF} = 180^\circ,$$

donde

$$\text{EAF} = \psi\,, \quad \text{quindi} \quad \text{senEAF} = \text{sen}\psi\,.$$

Mediante queste premesse, passiamo ad esprimere per mezzo di k e di ψ, tanto le lunghezze s, s_1, s_2, quanto le altezze h, h_1, h_2 dei tre lati o corde AE, AC, CE, che formano il triangolo iscritto nel semicircolo verticale KACE, di raggio r. Incominciando dalle lunghezze, primieramente abbiamo la corda

$$s_2 = \text{EC} = 2r.\text{sen}z\,.$$

poscia nel triangolo ACE troviamo

$$\text{AE} : \text{EC} = \text{sen}\psi : \text{sen}z\,,$$

Digitized by Google

quindi

$$s = AE = \frac{EC\,\mathrm{sen}\psi}{\mathrm{sen}z} = \frac{2r.\mathrm{sen}z\,\mathrm{sen}\psi}{\mathrm{sen}z} = 2r.\mathrm{sen}\psi;$$

ed anche

$$AC : EC = \mathrm{sen}AEC : \mathrm{sen}\,EAC = \mathrm{sen}(\psi + z) : \mathrm{sen}z\ ,$$

donde

$$s_1 = AC = \frac{EC\,\mathrm{sen}(\psi + z)}{\mathrm{sen}z} = \frac{2r.\mathrm{sen}z.\mathrm{sen}(\psi+z)}{\mathrm{sen}z} = 2r.\mathrm{sen}(\psi + z)\ .$$

Venendo alle altezze, primieramente nel triangolo AED abbiamo

$$ED : AE = \mathrm{sen}DAE : 1\ ,$$

donde

$$h = DE = AE\,\mathrm{sen}DAE = AE\,\mathrm{sen}EAF = 2r.\mathrm{sen}^2\psi\ .$$

Nel triangolo EIC si ha

$$EI : EC = \mathrm{sen}z : 1\ ,$$

quindi

$$h_2 = EI = EC\,\mathrm{sen}z = 2r.\mathrm{sen}^2 z\ ;$$

finalmente abbiamo

$$h_1 = DI = DE - EI = 2r.\mathrm{sen}^2\psi - 2r.\mathrm{sen}^2 z\ .$$

Per eliminare il $\mathrm{sen}z$ dalle trovate funzioni trigonometriche, rammentiamo dover essere

$$AC : CE = \mathrm{sen}(\psi + z) : \mathrm{sen}z = k : 1\ ,$$

donde

$$\mathrm{sen}z = \frac{1}{k}\mathrm{sen}(\psi + z) = \frac{1}{k}\ (\mathrm{sen}\psi\cos z + \cos\psi\,\mathrm{sen}z)\ ,$$

e quindi

$$\mathrm{sen}z = \frac{\mathrm{sen}\psi}{(k^2 - 2k\cos\psi + 1)^{\frac{1}{2}}}\ ,\quad \mathrm{sen}(\psi + z) = \frac{k\,\mathrm{sen}\psi}{(k^2 - 2k\cos\psi + 1)^{\frac{1}{2}}}\ .$$

Laonde sostituendo questi valori nelle precedenti espressioni, relative tanto alle lunghezze, quanto alle altezze dei tre piani inclinati AE, AC, CE, ed iscritti nel semicircolo verticale, avremo :

$$
(63)\quad\left\{
\begin{aligned}
&s = \mathrm{AE} = 2r.\mathrm{sen}\psi\,,\\
&s_1 = \mathrm{AC} = \frac{2r.k\mathrm{sen}\psi}{(k^2-2k\cos\psi+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2kr.\mathrm{sen}\psi}{\sqrt{\mathrm{P}}}\,,\\
&s_2 = \mathrm{EC} = \frac{2r.\mathrm{sen}\psi}{(k^2-2k\cos\psi+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2r.\mathrm{sen}\psi}{\sqrt{\mathrm{P}}}\,,\\
&h = \mathrm{DE} = 2r.\mathrm{sen}^2\psi\,,\\
&h_1 = \mathrm{DI} = \frac{(k^2-2k\cos\psi)2r.\mathrm{sen}^2\psi}{k^2-2k\cos\psi+1} = \frac{2\mathrm{Q}r.\mathrm{sen}^2\psi}{\mathrm{P}}\,,\\
&h_2 = \mathrm{EI} = \frac{2r\mathrm{sen}^2\psi}{k^2-2k\cos\psi+1} = \frac{2r.\mathrm{sen}^2\psi}{\mathrm{P}}\,,\\
&\text{e mediante la (61) avremo eziandio la}\\
&c_2 = -2\left(\frac{g\mathrm{Q}r}{\mathrm{P}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\psi\cos\psi\,,\ \text{essendo}\ \cos\alpha_1 = -\cos\psi\ :
\end{aligned}
\right.
$$

In queste formule, per maggior semplicità dei calcoli seguenti, abbiamo posto

$$k^2 - 2k\cos\psi + 1 = \mathrm{P}\ ,\quad k^2 - 2k\cos\psi = \mathrm{Q}\ .$$

Mediante le (63) possiamo ridurre le velocità conseguite alla fine di ciascuna discesa, ed i tempi decorsi nel conseguirle, ad essere dipendenti solo dal rapporto dato k, e dall'angolo ψ, che il calcolo dovrà determinare. In fatti dalle (60), (59), (57), (56) avremo le

$$
(64)\quad\left\{
\begin{aligned}
&v = 2(gr)^{\frac{1}{2}}.\mathrm{sen}\psi\,,\\
&v_1 = 2\left(\frac{g\mathrm{Q}r}{\mathrm{P}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\psi,\\
&v_2 = 2\left[gr\left(\frac{1+\mathrm{Q}\cos^2\psi}{\mathrm{P}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\psi;\\
&\text{e similmente}\\
&\tau = 2\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}},\\
&t = 2\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Q}}} + (1+\mathrm{Q}\cos^2\psi)^{\frac{1}{2}} + (\mathrm{Q})^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Digitized by Google

Ora, per la la condizione del problema, dovrà verificarsi la seguente uguaglianza

$$t = \tau \; ,$$

ovvero la

$$\frac{k}{\sqrt{Q}} + (1 + Q\cos^2\psi)^{\frac{1}{2}} + Q^{\frac{1}{2}}\cos\psi = 1,$$

che liberata dai radicali si riduce primieramente alla

$$k^2 + 2kQ\cos\psi = (2k + 2Q\cos\psi)\sqrt{Q} \; ,$$

quindi alla

$$(65) \qquad 4(k^2Q^2 - Q^3)\cos^2\psi + 4(k^3Q - 2kQ^2)\cos\psi + k^4 - 4k^2Q = 0 \; .$$

Per eliminare Q da questa equazione abbiamo

$$\begin{aligned} Q &= k^2 - 2k\cos\psi \; , \\ Q^2 &= k^4 - 4k^3\cos\psi + 4k^2\cos^2\psi \; , \\ Q^3 &= k^6 - 6k^5\cos\psi + 12k^4\cos^2\psi - 8k^3\cos^3\psi \; , \end{aligned}$$

essa perciò a riduzioni eseguite si cangerà nella

$$(66) \quad \cos^5\psi - k\cos^4\psi + \frac{1}{4}(k^2 - 4)\cos^3\psi + \frac{3}{4}k\cos^2\psi + \frac{1}{8}(2 - k^2)\cos\psi - \frac{3}{32}k = o \; .$$

Questa equazione, allorchè il rapporto k sia dato, è numerica ; laonde potrà risolversi riguardo a $\cos\psi$, adoperando i metodi conosciuti per la risoluzione approssimativa dell'equazioni numeriche. Intanto essendo la (66) di grado impari, coll'ultimo termine negativo, dobbiamo concludere che ammetterà essa per lo meno una radice reale positiva, la quale non potrà soddisfare al nostro problema, giacchè l'angolo ψ dev'essere >90, e perciò $\cos\psi < o$. Possiamo giungere alla (66) anche per altra via, sostituendo cioè nella (62) i valori delle (63), sopprimendo il fattor comune

$$\frac{2^8 r^8 \operatorname{sen}^{12}\psi}{P^4} \; ,$$

ed operando le altre opportune riduzioni.

Inoltre la (66) dovrà pure ammettere, per lo meno, una radice reale negativa: ed in fatti, ordinando l'equazione medesima secondo le potenze di k, si avrà .

$$(67) \quad \left(\frac{1}{4}\cos\psi^3 - \frac{1}{8}\cos\psi\right)k^2 - \left(\cos^4\psi - \frac{3}{4}\cos^2\psi + \frac{3}{32}\right)k + \cos^5\psi - \cos^3\psi + \frac{1}{4}\cos\psi = o \; .$$

Digitized by Google

Ora ponendo k bastantemente grande, il segno del primo membro di questa equazione, sarà quello stesso del suo primo termine: se questo dunque per due valori opportuni di $\cos\psi$, compresi fra -1 e o, cangerà di segno, il cangiamento stesso dovrà verificarsi anche in tutto il primo membro dell'equazione medesima, la quale dovrà perciò ammettere almeno una radice fra -1 e o. Ma i valori di $\cos\psi$ che annullano il primo termine della (67) sono i tre seguenti:

$$\cos\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\psi = 0, \quad \cos\psi = +\frac{1}{\sqrt{2}},$$

laonde facendo

$$(68) \qquad \cos\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \Delta, \quad \text{e} \quad \cos\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \Delta_1,$$

ove Δ dev'essere compreso fra o, ed $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mentre Δ_1 dovrà stare fra o, ed $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, saremo certi che questi due valori di $\cos\psi$, così limitati, comprenderanno una radice sola, cioè $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, delle tre che appartengono al primo termine della (67). Sostituendo uno dopo l'altro i due valori (68) nella (67), dovrà il suo primo termine cangiare di segno, e quindi anche tutto il suo primo membro. Da ciò concludiamo a buon diritto, che la (66) deve ammettere per lo meno una radice reale negativa, la quale sarà compresa fra o, e -1. Quindi è che generalmente in un circolo vi saranno almeno due triangoli eguali fra loro, uno a destra l'altro a sinistra del suo diametro verticale, ambedue soddisfacenti alla condizione del nostro enunciato problema.

Nel caso di $k=1$, la (66) riducesi alla

$$(69) \qquad \cos^5\psi - \cos^4\psi - \frac{3}{4}\cos^3\psi + \frac{3}{4}\cos^2\psi + \frac{1}{8}\cos\psi - \frac{3}{32} = o.$$

che ammette per lo meno tre radici reali; la prima compresa fra

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{e} \ \cos 90^\circ = o,$$

la seconda compresa fra

$$\cos 90^\circ = o, \quad \text{e} \quad \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Digitized by Google

la terza compresa fra

$$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad e \quad \cos 180^\circ = -1.$$

Quindi la (69) deve al meno avere due radici reali negative; per ciò nel caso di $k=1$, si potranno iscrivere in un circolo quattro triangoli eguali fra loro, due a destra, ed altri due a sinistra del suo diametro verticale, soddisfacenti alle condizioni del problema.

Volendo approssimarsi al valore della radice compresa fra i limiti $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, e -1, troveremo

$$\cos\psi = \cos 138^\circ,\ 20' = -0{,}7470251\ ,$$

$$\text{sen}\psi = \text{sen}138^\circ,\ 20' = 0{,}6647959\ .$$

Inoltre, poichè abbiamo dimostrato essere in generale

$$\text{arco}ECA = 360^\circ - 2\psi\ ;$$

così pel caso particolare che qui contempliamo avremo

$$\text{arco}\ ECA = 83^\circ,\ 20'\ ,$$

che sarà quello in cui deve il triangolo ECA essere iscritto.

Per $k=1$ abbiamo eziandio

$$P = 2(1-\cos\psi)\ ,\quad Q = 1 - 2\cos\psi\ ,$$

e sostituendo questi valori nelle (63), e (64) avremo dalle medesime le

$$s = 2r.\text{sen}\psi\,,\quad s_1 = s_2 = \frac{2r.\text{sen}\psi}{(2-2\cos\psi)^{\frac{1}{2}}}\ ,$$

$$h = 2r.\text{sen}^2\psi\,,\quad h_1 = \frac{(1-2\cos\psi)r.\text{sen}^2\psi}{1-\cos\psi}\ ,\quad h_2 = \frac{r.\text{sen}^2\psi}{1-\cos\psi}\ ,$$

$$c_2 = -\left[\frac{2gr(1-2\cos\psi)}{1-\cos\psi}\right]^{\frac{1}{2}}\text{sen}\psi\cos\psi\ ,$$

$$v = 2(gr)^{\frac{1}{2}}\text{sen}\psi\ ,\quad v_1 = \left[\frac{2gr(1-2\cos\psi)}{1-\cos\psi}\right]^{\frac{1}{2}}\text{sen}\psi,$$

$$v_2 = \left[2gr\left(\frac{1+(1-2\cos\psi)\cos^2\psi}{1-\cos\psi}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\text{sen}\psi,$$

$$\tau = 2\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

$$t = 2\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1-2\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} + [1+(1-2\cos\psi)\cos^2\psi]^{\frac{1}{2}} + (1-2\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right].$$

Introducendo in queste particolari formule il valore numerico del raggio r, ed i valori trovati di senψ e cosψ, otterremo in numeri la determinazione tanto delle altezze e delle lunghezze che appartengono ai tre lati del triangolo iscritto, quanto delle velocità e dei tempi corrispondenti alla fine di ogni discesa pei lati medesimi, nella fatta ipotesi di $k = 1$.

Se invece fosse dato il valore di ψ, e volesse trovarsi, per soddisfare al problema, quello del rapporto k, in tal caso la soluzione sarebbe algebrica; poichè dalla (67) si ottiene

$$k^2 - \left(\frac{32\cos^4\psi - 24\cos^2\psi + 3}{8\cos^3\psi - 4\cos\psi}\right)k + \frac{32\cos^5\psi - 32\cos^3\psi + 8\cos\psi}{8\cos^3\psi - 4\cos\psi} = 0\ ,$$

donde, a riduzioni eseguite, avremo

$$k = \frac{32\cos^4\psi - 24\cos^2\psi + 3 \pm \sqrt{(9-16\cos^2\psi)}}{16\cos^2\psi - 8\cos\psi}\ ,$$

in cui si vede che dovrà essere

$$0 > \cos\psi \geqq -\frac{3}{4} = -0{,}75000,$$

quindi

$$90^\circ < \psi \leqq 138^\circ{,}35'\ ,$$

affinchè il k non riesca immaginario. Ma questo rapporto dovrà essere anche positivo, e perciò il valore sempre negativo di cosψ, dovrà esser tale, da soddisfare a queste due condizioni. Così per es. fatto $\cos\psi = -\frac{3}{4}$, ab-

Digitized by Google

abbiamo $k = +\frac{1}{2}$; e fatto $\cos\psi = -\frac{1}{2}$, si avrà

$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = +0{,}61800.$$

Abbiamo trovato dunque tre valori corrispondenti di $\cos\psi$ e di k che soddisfano alla (66), e quindi al problema, i quali sono:

$$\cos\psi = \cos 138°,\ 20' = -0{,}7470251,\ k = 1\ ,$$
$$\cos\psi = \cos 138°,\ 35' = -0{,}75000\ \ ,\ k = \tfrac{1}{2}\ ,$$
$$\cos\psi = \cos 120°\ \ \ \ = -0{,}50000\ \ ,\ k = 0{,}61800\ .$$

Ma pel caso in cui l'angolo ψ sia poco maggiore di 90°, potremo trascurare le potenze di $\cos\psi$ superiori alla prima, ed avremo

$$k = -\frac{3}{4\cos\psi},$$

risultamento che si ottiene anche dalla (66), e che sarà positivo, dovendo $\cos\psi$ essere sempre negativo, per soddisfare al problema.

Digitized by Google

INDICE DELLE MATERIE

INTRODUZIONE ISTORICA.

MOTO DISCENDENTE.

Digitized by Google

MOTO ASCENDENTE.

Digitized by Google

APPENDICE.

SBN 679595

Digitized by Google

Digitized by Google

	ERRORI		CORREZIONI
pag. 4	lin. 18	*votorom*	*votorum*
»	33	*titillationem*	*titillatione*
5	30	un	un'
»	31	accad.	acad.
6	20	depremere	deprimere
7	22	1640	1690
9	26	comincierà	comincerà
12	12	dalle	delle
13	23	vogliansi	vogliasi
14	7	$gesn\varphi_1$	$gsen\varphi_1$
»	11	della	dalla
15	23	ogniuno	ognuno
16	4	che l'angolo	che il coseno dell'angolo
17	20	delle (2)	dalle (3)
27	6	$= \alpha_n$	$= \alpha_1$
28	30	(§ IV, e IV)	(§ IV, e VI)
43	22	dai	dei

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA